TD 9

6 janvier 2025

Exercice 1

1. La fonctionnelle
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & [0,1] \\ f & \mapsto & \int_{[0,1]} \mathbf{1}[f(t) \geq 0] dt \end{array}$$
est elle continue ? Trouver un ensemble $E \subseteq \mathcal{C}$ (non trivial) tel qu'elle soit continue sur E.
2. Soit B un mouvement Brownien. Montrer que p.s., $\mathrm{Leb}(\{t : B_t = 0\}) = 0$.
(Indice : regarder l'espérance de $\mathrm{Leb}(\{t : B_t = 0\})$ et utiliser le théorème de Fubini.)
3. Soit $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. centrées de variance finie, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\frac{1}{n}|\{k \leq n : S_k \geq 0\}|$ converge en loi vers une variable aléatoire P dont la loi est indépendante de celle de X_1.
(On admettra que $\frac{1}{n}|\{k \leq n : S_k \geq 0\}| \sim \mathrm{Leb}(W_n(t) \geq 0)$.)

Exercice 2

Soit δ dans $]0,1]$. Le but de l'exercice est de montrer que si F_n converge en loi vers F dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et si il existe α, β, γ tels que pour tout n, s et t on a
$$\mathbb{E}\big(|F_n(s) - F_n(t)|^\alpha \big) \leq \beta\, |s-t|^{\gamma+1}. \tag{1}$$
alors F est p.s. δ-Höldérienne pour tout $\delta < \gamma/\alpha$. Comme dans le cours, pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, et $p \geq 1$ entier, on note
$$U_p(f) := \sup_{0 \leq q < 2^p} \left| f\left(\tfrac{q}{2^p}\right) - f\left(\tfrac{q+1}{2^p}\right) \right|,$$

1. Soit $\delta < \gamma/\alpha$. Montrer que
$$\sum_{p \geq 1} 2^{p\delta\alpha} \mathbb{E}\big[U_p(F)^\alpha\big] < +\infty.$$
(Indice : on rappelle l'inégalité suivante démontrée en cours : l'hypothèse (1) implique $\|U_p(F_n)\|_\alpha^\alpha \leq \beta 2^{-p\gamma}$.)
2. En déduire qu'il existe une variable aléatoire S telle que, p.s., pour tout $p \geq 1$,
$$U_p(F) \leq S\, 2^{-p\delta}$$
3. Prouver que F est p.s. δ-Höldérienne.
4. En déduire que le mouvement Brownien est p.s. δ-Höldérien pour tout $\delta < 1/4$.
(On pourra utiliser une inégalité établie dans le cours dans la preuve du théorème de Donsker.)
5. En cherchant une égalité du type (1) pour tout $\alpha = 2k$ quand $F_n = W_n$ est une marche aléatoire renormalisée, montrer que le mouvement Brownien est p.s. δ-Höldérien pour tout $\delta < 1/2$.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier naturel, et $p = p(n)$ un paramètre dans $[0, 1]$. Soit $E_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$ un ensemble aléatoire défini par

— $\mathbb{P}[i \in E_n] = p$ pour tout $i \leq n$;

— ces événements sont indépendants.

On s'intéresse aux paires $\{j, j+1\}$ d'entiers consécutifs dans E_n.

1. Montrer que si $p \sim n^{-1/2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$, alors E_n ne contient pas de paires d'entiers consécutifs.
2. Montrer que si $p \sim n^{1/2+\delta}$ avec $\delta > 0$, alors E_n contient deux entiers consécutifs avec probabilité tendant vers 1.

Exercice 4

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. centrées bornées de loi P. On suppose que X_1 est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de période maximale 1. Comme dans la théorie des grandes déviations, on on note K le supremum essentiel de X_1, on choisit b dans $]\mathbb{E}[X_1], K[$, et on définit la loi de probabilité Q par

$$\frac{dQ}{dP}(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[e^{\theta^* X_1}]} e^{\theta^* x},$$

où θ^* est choisi de sorte que $\int_{\mathbb{R}} y dQ(y) = b$. Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. de loi Q. On supposera dans la suite nb entier.

1. Comparer $\mathbb{P}[S_n = nb]$ et $\mathbb{P}[T_n = nb]$.
2. En déduire un équivalent asymptotique pour $\mathbb{P}[S_n = nb]$.