TD 8

16 décembre 2024

Exercice 1

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. suivant une loi de Poisson de paramètre 2, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{e^{-2}2^k}{k!}$ pour $k \geq 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner une estimée asymptotique (équivalent asymptotique ou borne supérieure exponentielle) pour les quantités suivantes :

$$\mathbb{P}[S_n = n], \quad \mathbb{P}[S_n \leq n], \quad \mathbb{P}[S_n = 2n], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 2n], \quad \mathbb{P}[S_n = 2n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 2n - \sqrt{n}], .$$

Quand la quantité considérée converge vers une limite strictement positive, préciser la vitesse de convergence.

Note : on précise que, si X suit une loi de Poisson de paramètre 2, on a

$$\mathbb{E}[X] = 2, \quad \mathrm{Var}(X) = 2, \quad \rho := \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^3] = 2 + 8e^{-2}.$$

Exercice 2

Soit F et G les fonctions aléatoires définies ainsi :

- Avec probabilité $1/2$, on a $F(x) \equiv 0$. Sinon $F(x) \equiv x - \frac{1}{2}$. ($\equiv$ signifie « égal pour tout x dans $[0,1]$ »)
- Avec probabilité $1/2$, on a $G(x) \equiv \min(x - \frac{1}{2}, 0)$. Sinon $G(x) \equiv \max(x - \frac{1}{2}, 0)$.

1. Soit t dans $[0,1]$. Montrer que $F(t) \stackrel{\text{loi}}{=} G(t)$.
2. Trouver $s < t$ dans $[0,1]$ tels que $(F(s), F(t)) \stackrel{\text{loi}}{\neq} (G(s), G(t))$.

Exercice 3

Soit $d > 0$ et $(B_i)_{i \leq 2d}$ des v.a. i.i.d. de distribution

$$\mathbb{P}[B_i = -1] = \mathbb{P}[B_i = 1] = \tfrac{1}{2}.$$

On définit des fonctions aléatoires H_d et K_d telles que

$$\begin{cases} H_d(\frac{i}{2d}) = K_d(\frac{i}{2d}) = B_i \text{ pour } 1 \leq i \leq 2d; \\ H_d(0) = -K_d(0) = \prod_{i=1}^{2d} B_i. \end{cases}$$

et H_d et K_d sont affines sur chacun des segments $[\frac{i-1}{2d}, \frac{i}{2d}]$ (pour $1 \leq i \leq 2d$).

1. Soit j dans $\{0, 1, \ldots, 2d\}$. Montrer que

$$\Big(H_d(\tfrac{i}{2d})\Big)_{\substack{0 \leq i \leq 2d \\ i \neq j}} \stackrel{\text{loi}}{=} \Big(K_d(\tfrac{i}{2d})\Big)_{\substack{0 \leq i \leq 2d \\ i \neq j}}.$$

(Notez bien l'ensemble d'indices des vecteurs que l'on veut comparer ; on prend les entiers de 0 à $2d$, y compris 0, auxquels on retire j).

2. En déduire que H_d et K_d ont les mêmes lois fini-dimensionnelles de dimension d, i.e. pour tous $t_1 < \cdots < t_d$ dans $[0,1]$, on a

$$\Big(H_d(t_1), \ldots, H_d(t_d)\Big) \overset{\text{loi}}{=} \Big(K_d(t_1), \ldots, K_d(t_d)\Big).$$

3. Montrer que

$$\Big(H_d(0), H_d(\tfrac{1}{2d}) \ldots, H_d(\tfrac{2d-1}{2d}), H_d(1)\Big) \overset{\text{loi}}{\neq} \Big(K_d(0), K_d(\tfrac{1}{2d}) \ldots, K_d(\tfrac{2d-1}{2d}), K_d(1)\Big).$$

Exercice 4

1. Soit f_n une suite de fonctions (déterministes) dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que si $f_n(x)$ converge pour tout x vers $f(x)$ et si

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{n \geq 1} \omega(f_n; \delta) = 0, \tag{1}$$

alors f_n converge uniformément vers f.

2. Supposons qu'il existe ℓ tel que f_n soit ℓ-Lipshitzienne pour tout n. Montrer que (1) est satisfaite.
3. Soit F_n une suite de processus aléatoires définis sur un même espace de probabilités. On suppose qu'il existe une v.a. L telle que, pour tout n, p.s., F_n est L-Lipschitzienne. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la quantité $\sup_{n\geq 1} \mathbb{P}[\omega(F_n,\delta) \geq \varepsilon]$ tend vers 0 quand δ tend vers 0.