TD 7

9 décembre 2024

Exercice 1

Soit $p = 1/2$ et S_n une variable aléatoire de loi Binomial(n, p). Soit $\alpha > 0$ et z_α l'unique réel tel que $\mathbb{P}(Z \leq z_\alpha) = 1 - \alpha$. Un résultat classique de statistique indique que

$$I_\alpha := \left] -\infty; \frac{S_n}{n} + \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}} \right]$$

est un intervalle de confiance de niveau **asymptotique** $1 - \alpha$ pour le paramètre p, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(p \in I_\alpha) = 1 - \alpha.$$

En utilisant l'inégalité de Berry–Esseen, donner un encadrement du niveau réel pour $n = 1000$. Même question avec $p = 0.1$.
(On pourra prendre $C = 1/2$ dans le théorème de Berry–Esseen et approximer le calcul de ρ si besoin.)

Exercice 2

Considérons la marche aléatoire simple $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant la formule de Stirling, trouver un équivalent asymptotique de $\mathbb{P}[S_n = n/2]$ (on suppose que n est un multiple de 4). Comparer avec l'équivalent de $\log(\mathbb{P}[S_n \geq n/2])$, donné par le principe de grande déviation.

Exercice 3

Soit P une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. Trouver une borne supérieure pour $\mathbb{P}[P \geq A]$, qui décroit exponentiellement vite en A.

Exercice 4

On utilise les notations des notes de cours (Section 6), en particulier

$$M(\theta) = \mathbb{E}[\exp(\theta X_1)], \quad \Lambda(\theta) = \log(M(\theta)), \quad \Lambda^*(b) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta b - \Lambda(\theta)),$$

et θ^* est un point réalisant ce supremum (s'il est atteint).
Supposons que $M(\theta) < +\infty$ pour tout θ dans un intervalle $[-\varepsilon; \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$). Montrer que, pour tout $p > 0$, on a $\mathbb{E}[|X_1|^p] < +\infty$ et

$$E[X_1^p] = M^{(p)}(0).$$

En déduire que si $b > \mathbb{E}[X_1]$, alors $\theta^* > 0$ et $\Lambda^*(b) > 0$.
(Indice : pour la première partie, on pourra développer en série $\mathbb{E}[e^{zX_1}]$ autour de $z = 0$; pour la seconde partie, regarder le développement de $\theta b - \Lambda(\theta)$ autour de $\theta = 0$.)