TD 6

25 novembre 2024

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables i.i.d. de loi Poisson(1) et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant le théorème local limite, donner des estimées de $\mathbb{P}[S_n = \lfloor n/2 \rfloor]$, $\mathbb{P}[S_n = n]$ et $\mathbb{P}[S_n = 2n]$. (Attention, X_1 n'est pas centrée...)

Exercice 2

Soient $X_1, X_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. centrée, de variance finie σ^2 à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et de période maximale 1. On notera $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $k \le n$ et a dans $\mathbb{Z}$. Prouver que
$$\mathbb{P}[S_k = a \mid S_n = 0] = \frac{\mathbb{P}[S_k = a] \cdot \mathbb{P}[S_{n-k} = -a]}{\mathbb{P}[S_n = 0]}.$$
2. Trouver l'asymptotique de l'expression ci-dessus quand n, k et possiblement a tendent vers $+\infty$, avec $k/n \to \alpha \in [0,1]$ et $a/\sqrt{n} \to x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire la loi limite de $\frac{1}{\sqrt{n}} S_k$, conditionnellement à $S_n = 0$, dans le régime ci-dessus ?

Exercice 3

(Théoreme local limite pour une variable continue)
On considère ici une variable aléatoire X_1 à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et que $\mathbb{E}(X_1^2) = \sigma^2$ est non nulle et finie. On suppose[1] aussi que φ_X est intégrable et tend vers 0 en $\pm\infty$. Soit x_n une suite telle que $\lim_{n\to\infty} x_n/\sqrt{n} = x$ et on prend $a < b$ deux nombres réels. En utilisant le théorème d'inversion de Fourrier pour les distributions régulières, trouver un équivalent asymptotique pour
$$\mathbb{P}\big(S_n \in [x_n + a, x_n + b]\big).$$

Exercice 4

(Note : Cet exercice concerne le théorème d'inversion de Fourier et sert de preparation pour le prochain cours.)
Soit $X = U_1 + U_2$ où U_1 et U_2 sont des variables uniformes indépendantes dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer la densité de X et sa fonction caractéristique. En utilisant le théorème d'inversion de Fourier, construire une variable aléatoire Y dont la fonction caractéristique est à support compact.

1. En fait on peut montrer le même résultat en supposant seulement $|\varphi_X(t)| < 1$ pour tout t dans $\mathbb{R}$, mais la preuve est plus difficile..., voir le livre de Durrett référencé dans les notes de cours.