TD 5

18 novembre 2024

Exercice 1

Prouver par la méthode des moments que, si S_n suit une loi binomiale $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$, alors S_n converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 2

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. i.i.d. *centrées* telles que, pour tout $r \geq 1$, $\mathbb{E}[|X_1|^r] < +\infty$. Posons $\sigma^2 = E[X_1^2]$ et $T_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1}$. Alors $\tilde{T}_n := \frac{T_n}{\sigma^2\sqrt{n}}$ converge en distribution vers une loi Gaussienne centrée réduite Z.

Indice : à un terme $E\big[X_{i_1}X_{i_1+1}\cdots X_{i_r}X_{i_r+1}\big]$, on peut associer la plus partition la plus fine (c'est-à-dire avec le plus de parts possible) telle que s et t soient dans le même bloc dès que $|i_s - i_t| \leq 1$ (c'est-à-dire dès que $X_{i_s}X_{i_s+1}$ et $X_{i_t}X_{i_t+1}$ ne sont pas indépendants). On montrera ensuite que seules les suites dont la partition associée est une partition en paire contribuent asymptotiquement à $\mathbb{E}[T_n^r]$.

Exercice 3

Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-(\log(x))^2/2} & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0, \end{cases}$$
$$g(x) = f(x)\,(1 + \sin(2\pi\log(x)))$$

1. Montrer que si Z est une loi normale standard, alors f est la densité de $X = e^Z$.
2. Montrer que f et g sont des densités et que les variables aléatoires correspondantes X et Y ont tous leurs moments finis.
3. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$.
   (Indice : écrire $\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[Y^k]$ comme une intégrale et poser $\log(x) = s + k$.)