# TD 3

4 novembre 2024

### Exercice 1

On rappelle qu'un point fixe d'une permutation est un entier $i$ tel que $\sigma(i) = i$. Montrer que, avec probabilité $1-o(1)$, une permutation aléatoire uniforme $\sigma_n$ ne contient pas deux points fixes consécutifs.

### Exercice 2

Soit $X_n$ le nombre de blocs 01 dans un mot aléatoire uniforme $w_n$ dans $\{0,1\}^n$. Montrer que, $X_n/n$ tend vers en probabilité vers un nombre $c$, que l'on calculera.

### Exercice 3

Soit $X$ une v.a. à valeurs **réelles** et espérance finie. Montrer que, pour tout $\mu \geq \mathbb{E}[X]$, on a

$$\mathbb{P}[X \leq \mu] > 0.$$

En déduire que, si $X$ a valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{E}[X] < 1$, alors $\mathbb{P}[X = 0] > 0$.

### Exercice 4

Soit $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs de norme 1 dans $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}.$$

(Indice : calculer $\mathbb{E}\left[\|\sum_{i=1}^n X_i v_i\|^2\right]$, en prenant les $X_i$ i.i.d. avec $\mathbb{P}[X_1 = -1] = \mathbb{P}[X_1 = 1] = 1/2$.)

### Exercice 5

1. Soit $X_n$ le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire uniforme $\sigma_n$. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$. Peut-on utiliser la méthode du second moment pour estimer $P[X_n = 0]$ ?
2. Soit $Y$ une variable aléatoire avec une variance finie, que l'on note $\sigma^2$. Montrer que, pour $u > 0$,
$$\mathbb{P}[Y \geq \mathbb{E}(Y) + u] \leq \frac{\sigma^2}{u^2 + \sigma^2}.$$
Indice : écrire, pour $t > -\mathbb{E}[X]$ bien choisi,
$$\mathbb{P}[X \geq \mathbb{E}[X] + u] \leq \mathbb{P}\left[(X+t)^2 \geq (\mathbb{E}[X] + u + t)^2\right].$$
3. Trouver une borne supérieure pour $\mathbb{P}[X_n \geq 2]$, où $X_n$ est le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire uniforme.