Examen de rattrapage du cours "Processus Stochastiques discrets", M2 MFA, S9 2022/2023

8 mars 2023

Exercice 1. (5 points) Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. suivant une loi de Poisson de paramètre 1, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ pour $k \geq 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner une estimée asymptotique (la limite si elle est non nulle, un équivalent asymptotique ou une borne supérieure exponentielle sinon) pour les quantités suivantes :

$$\mathbb{P}[S_n \geq n], \quad \mathbb{P}[S_n = n], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 2n], \quad \mathbb{P}[S_n = 2n], \quad \mathbb{P}[S_n \geq \tfrac{n}{2}], \quad \mathbb{P}[S_n = \tfrac{n}{2}].$$

(Pour la dernière quantité, on supposera n pair. On rappelle que $\mathrm{Var}(X_1) = 1$ et que, pour pour tout réel θ, on a $\mathbb{E}[e^{\theta X_1}] = \exp(e^\theta - 1)$.)

Exercice 2. (3.5 points) Soit $n \geq 1$ un entier naturel, et $p = p(n)$ un paramètre dans $[0, 1]$. Soit $E_n \subseteq \{1, \dots, n\}$ un ensemble aléatoire défini par

— $\mathbb{P}[i \in E_n] = p$ pour tout $i \leq n$;

— ces événements sont indépendants.

On s'intéresse aux paires $\{j, j+1\}$ d'entiers consécutifs dans E_n.

1. Montrer que si $p \sim n^{-1/2-\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$, alors E_n ne contient pas de paires d'entiers consécutifs.
2. Montrer que si $p \sim n^{1/2+\delta}$ avec $\delta > 0$, alors E_n contient deux entiers consécutifs avec probabilité tendant vers 1.

Exercice 3. (1.5 points) Soit $X_1, X_2, \dots$ des v.a. i.i.d. centrées, de variance finie σ^2. On note $S_k = X_1 + \cdots + X_k$. Décrire la limite de $\frac{1}{k} S_k \, S_{2k}$ quand k tend vers l'infini, à l'aide de variables Gaussiennes.