Examen du cours
“Processus Stochastiques discrets”,
M2 MFA, S9 2022/2023

25 janvier 2023

Exercice 1. (6 points ; 1 point par quantité) Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. i.i.d. suivant une loi géométrique sur $\{1, 2, \dots\}$ de paramètre $1/2$, i.e. $\mathbb{P}(X_1 = k) = 2^{-k}$ pour $k \geq 1$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner une estimée asymptotique (équivalent asymptotique ou borne supérieure exponentielle) pour les quantités suivantes :

$$\mathbb{P}[S_n = 2n], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 2n], \quad \mathbb{P}[S_n = \lfloor 2n+\sqrt{n} \rfloor], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 2n+\sqrt{n}], \quad \mathbb{P}[S_n = 3n], \quad \mathbb{P}[S_n \geq 3n].$$

Quand la quantité considérée converge vers une limite strictement positive, préciser la vitesse de convergence.

Note : on précise que, si X suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, on a

$$\mathbb{E}[X] = 2, \quad \mathrm{Var}(X) = 2, \quad \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^3] = 7.$$

Exercice 2. (6 points ; 2 points par question) Soit n et N deux entiers naturels, et $X_1, \dots, X_N$ des variables i.i.d. uniformes dans $\{1, \dots, n\}$. On s'intéresse à l'ensemble $C_N = \{X_1, \dots, X_N\}$ (sans répétitions). C'est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ et on aimerait estimer la probabilité qu'il soit égal à $\{1, \dots, n\}$. En étudiant les moments de $M_n := \big|\{1, \dots, n\} \backslash C_N\big|$ (nombre d'éléments manquants), répondre aux questions suivantes :

1. Montrer que si $N \sim (1+\varepsilon) n \log(n)$ avec $\varepsilon > 0$, alors $C_N = \{1, \dots, n\}$ avec probabilité tendant vers 1.
2. Montrer que si $N \sim (1 - \delta) n \log(n)$ avec $\delta > 0$, alors $C_N \neq \{1, \dots, n\}$ avec probabilité tendant vers 1.
3. Montrer que si $N = n \log(n) + \alpha n + O(1)$ avec α constant, alors $|M_n|$ tend vers une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. En déduire la limite de la probabilité $\mathbb{P}(C_N = \{1, \dots, n\})$.

Exercice 3. (2 points) Soit F_n une suite tendue dans $\mathcal{C} := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $\eta > 0$. Montrer que

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geq 1} \mathbb{P}[\omega(F_n,\delta) \geq \eta] = 0.$$

Exercice 4. (6 points ; 2 points par question) Soit $X_1, X_2, \dots$ des v.a. i.i.d. centrées, de variance finie σ^2. On note $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, et on définit pour tout n une fonction aléatoire W_n dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ par :

— $W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}$ si nt est entier ;

— W_n est affine sur chaque segment $[i/n; (i+1)/n]$.

1. Montrer que, pour tout n, p.s., on a

$$\tfrac{1}{2}S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} + \tfrac{1}{2}S_n = n^{3/2} \int_0^1 W_n(t)dt.$$

2. En déduire que la suite de v.a. $n^{-3/2}\sigma^{-1}\sum_{k=1}^n S_k$ converge en loi, et que la loi limite ne dépend pas de la loi de X_1.
3. On suppose que X_i a tous ses moments finis. Montrer que les moments de $n^{-3/2}\sigma^{-1}\sum_{k=1}^n S_k$ convergent vers ceux de sa limite.

   Indice. On rappelle l'inégalité maximale de Doob : comme $(S_k)_{k\geq 0}$ est une martingale, pour $s > 1$, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\max_{k\leq n} |S_k|\right)^s\right] \leq \left(\frac{s}{s-1}\right)^s \mathbb{E}[|S_n|^s].$$