Examen du cours
“Processus Stochastiques discrets”,
M2 MFA, S9 2024/2025

15 janvier 2025

(L'examen est noté sur 18 et est un peu long. La note finale sera obtenue en multipliant par 4/3.)

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d., uniformes dans $\{1, 2\}$ (i.e. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}$), et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Donner des estimées (limite, équivalent asymptotique ou borne supérieure exponentielle à taux optimal) pour les quantités suivantes (on supposera $n/4$ et $\sqrt{n}$ entiers) :

$$\mathbb{P}\big(S_n = \tfrac{5n}{4}\big), \qquad \mathbb{P}\big(S_n \geq \tfrac{5n}{4}\big), \qquad \mathbb{P}\big(S_n = \tfrac{3n}{2} + \sqrt{n}\big), \qquad \mathbb{P}\big(S_n \geq \tfrac{3n}{2} + \sqrt{n}\big).$$

Fournir des vitesses de convergence quand c'est approprié.

Exercice 2 (5,5 points)**.** [Les items 1 à 3 sont indépendants.]

Soit $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires i.i.d., uniformes dans l'intervalle $[0, 1]$.

1. (1 point) Soit L_n la longueur du plus long facteur décroissant de $(U_1, \dots, U_n)$ (un facteur est une sous-suite consécutive $(U_i, U_{i+1}, \dots, U_{i+j})$). Soit ℓ_n une suite d'entiers, avec $\ell_n = o(n)$. Montrer que si $n/\ell_n!$ tend vers 0, alors $L_n < \ell_n$ avec probabilité tendant vers 1.

Soit D_n le nombre de descentes de $(U_1, \dots, U_n)$, i.e. le nombre de $i \leq n-1$ tels que $U_i > U_{i+1}$.

2. a. (1 point) Trouver une suite de réels a_n tel que $\frac{D_n}{a_n}$ tende vers 1 en probabilité.
   b. (0,5 point) En utilisant la méthode du second moment, montrer que
   $$\mathbb{P}\big(D_n \geq \tfrac{3(n-1)}{4}\big) = O(n^{-1}).$$
3. Posons $V_1 = U_1$ et $V_k = \{U_k - U_{k-1}\}$, la partie fractionnaire de $U_k - U_{k-1}$ (la partie fractionnaire de x est $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$).
   a. (1 point) Montrer que, pour tout x dans $[0, 1]$, conditionnellement à $U_{k-1} = x$, la variable V_k est uniforme dans $[0, 1]$. En déduire que $(V_1, \dots, V_n)$ sont i.i.d. uniformes dans $[0, 1]$.
   b. (1 point) Soit $S_k = V_1 + \cdots + V_k$. Montrer que p.s., $\{S_k\} = U_k$, et que, p.s.,
   $$\lfloor S_{k+1} \rfloor = \lfloor S_k \rfloor + 1 \text{ si et seulement si } U_{k+1} < U_k.$$
   En déduire que $\lfloor S_n \rfloor = D_n$ p.s.
   c. (1 point) Trouver $C < 1$ telle que $\mathbb{P}(D_n \geq 3n/4) < C^n$ quand n est un multiple de 4. (On pourra utiliser que $e - 1 < e^{3/4}$.)

(Tournez la page, s'il vous plaît.)

Exercice 3 (3 points)**.** Pour une variable aléatoire réelle Y, on note $\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[\exp(itY)]$ sa fonction caractéristique.

1. (1 point) Que vaut $\limsup_{t\to+\infty} |\varphi_Y(t)|$ si Y prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$? et si Y a une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres dyadiques et X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{D}\cap]0,1[$ telle que

$$\mathbb{P}\big(X = \tfrac{p}{2^q}\big) = \tfrac{1}{2^{2q-1}}, \tag{1}$$

pour tout $q \geq 1$ et p entier impair entre 1 et $2^q - 1$. On note $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\exp(itX)]$ la fonction caractéristique de X.

2. (0,5 point) Vérifier que (1) définit bien une loi de probabilités sur $\mathbb{D}\cap]0,1[$.
3. (0,5 point) Montrer que $|\varphi_X(t)| < 1$ pour tout réel $t \neq 0$.
4. (1 point) Montrer que $|\varphi_X(2^{q+1}\pi) - 1| \geq 2^{-q+1}$. Que vaut $\limsup_{t\to+\infty} |\varphi_X(t)|$?

Exercice 4 (4,5 points)**.** Soit $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonctionnelle φ sur $\mathcal{C}$ ainsi : pour f dans $\mathcal{C}$,

$$\varphi(f) := \inf\big\{x_0 : \forall x \in [0,1], f(x) \geq f(x_0)\big\}.$$

Autrement dit, $\varphi(f)$ est la position du minimum de f, et si le minimum de f est atteint en plusieurs endroits, alors on prend la position du premier minimum. Soit $E \subset \mathcal{C}$ le sous-ensemble des fonctions continues qui admettent leur minimum en un point unique, i.e.

$$E = \big\{f \in \mathcal{C} :\ \exists x_0, \forall x \neq x_0,\ f(x) > f(x_0)\big\}.$$

On admettra que le mouvement Brownien B appartient à E p.s.

1. (1,5 points) Montrer, pour tout f dans E, φ est continue en f. La fonctionnelle φ est-elle continue sur tout $\mathcal{C}$?
2. (1 point) Soit S_n une marche aléatoire centrée à variance finie non nulle, et, pour $n \geq 1$, K_n la variable aléatoire définie par

   $$K_n = \inf\big\{k' :\ \forall k \leq n, S_k \geq S_{k'}\big\}.$$

   (Autrement dit, K_n est la position du minimum de la marche aléatoire entre les temps 0 et n ; si le minimum est atteint plusieurs fois, on prend la position du premier minimum.) Que peut-on dire sur K_n quand n tend vers $+\infty$?

Dans les questions suivantes, on considère la marche aléatoire simple T_n sur $\mathbb{Z}$. On admettra le résultat combinatoire suivant : le nombre A_m de marches positives de longueur m, i.e. de suites $(x_1,\ldots,x_m)$ dans $\{-1,1\}^m$ telles que toutes les sommes partielles $x_1 + \cdots + x_k$ soient positives ou nulles, est $\binom{m}{\lfloor m/2\rfloor}$.

3. (1 point) Montrer que, pour $k \geq 1$,

   $$\mathbb{P}[K_n = k] = \frac{A_{k-1}\cdot A_{n-k}}{2^n}.$$

4. (1 point) Calculer l'asymptotique de $\mathbb{P}[K_n = k]$ dans le régime où k/n tend vers α dans $]0,1[$ (pour simplifier, on pourra supposer que $k-1$ et $n-k$ sont pairs). En déduire (sans preuve rigoureuse) la loi limite de $\frac{K_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.