Devoir Maison no 2

À rendre pour le 2 décembre

Exercice 1

Soit n et N deux entiers naturels, et $X_1, \dots, X_N$ des variables i.i.d. uniformes dans $\{1, \dots, n\}$. On s'intéresse à l'ensemble $C_N = \{X_1, \dots, X_N\}$ (sans répétitions). C'est un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ et on aimerait estimer la probabilité qu'il soit égal à $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer que si $N \sim (1+\varepsilon) n \log(n)$ avec $\varepsilon > 0$, alors $C_N = \{1, \dots, n\}$ avec probabilité tendant vers 1.
2. Montrer que si $N \sim (1-\delta) n \log(n)$ avec $\delta > 0$, alors $C_N \neq \{1, \dots, n\}$ avec probabilité tendant vers 1.

Exercice 2

[La question 2. fait en partie référence au cours du 20 novembre, la question 3. à celui du 27 novembre.]
Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. avec

$$\mathbb{P}[X_1 = 1] = \mathbb{P}[X_1 = -1] = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Calculer, par des arguments de comptage, $\mathbb{P}[S_n = 0]$, pour $n \geq 0$.
2. Trouver le comportement asymptotique de $\mathbb{P}[S_n = 0]$ quand n est pair et tend vers $+\infty$. Comparer avec le théorème limite local.
3. Relier $\mathbb{P}[S_n \leq 0]$ et $\mathbb{P}[S_n = 0]$, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}[S_n \leq 0]$. Utiliser ce résultat pour minorer la constante C apparaissant dans le théorème de Berry–Esseen.

Problème

On souhaite organiser un Père Noël Secret entre $2n$ individus, en couple 2 par 2, de telle sorte que personne ne s'offre de cadeaux à lui même, ni à son conjoint. Mathématiquement on veut tirer une permutation σ_{2n} aléatoire uniforme de taille $2n$, conditionnée à l'évènement :

$$\sigma_{2n}(i) \neq i \text{ pour tout } i \leq 2n,$$
$$\text{et } \sigma_{2n}(2k-1) \neq 2k \text{ et } \sigma_{2n}(2k) \neq 2k-1 \text{ pour tout } k \leq n.$$

Une méthode naïve consiste à tirer σ_{2n} uniformément au hasard, et à recommencer si elle ne satisfait pas la condition voulue (méthode de rejet). Combien de fois doit-on recommencer en moyenne, à la limite $n \to \infty$?