TD6 - Probas discrètes

Exo 1 On pose $Y_i = X_i - 1$, les Y_i sont i.i.d. centrées variance $\sigma^2 = 1$

Soit $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i = S_n - n$

Thm limite local : $\sup_{a \in \mathbb{Z}} \left| \mathbb{P}[T_n = a] \cdot \sqrt{n} - \frac{e^{-a^2/2n}}{\sqrt{2\pi}} \right| \to 0$

Pour $a = -\lceil \frac{n}{2} \rceil$, $e^{-a^2/2n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$\mathbb{P}[S_n = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor] = \mathbb{P}[T_n = -\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor] = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Pour $a = 0$, on obtient

$$\mathbb{P}[S_n = n] = \mathbb{P}[T_n = 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1 + o(1))$$

Pour $a = n$, $e^{-a^2/2n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$\mathbb{P}[S_n = 2n] = \mathbb{P}[T_n = n] = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Exo 2 :

1. $\mathbb{P}[S_k = a \mid S_n = 0] = \dfrac{\mathbb{P}[S_k = a \wedge S_n = 0]}{\mathbb{P}[S_n = 0]}$

On a $S_k = a \wedge S_n = 0 \iff \begin{array}{l} X_1 + \dots + X_k = a \\ X_{k+1} + \dots + X_n = -a \end{array}$

De plus, $X_1 + \dots + X_k$ et $X_{k+1} + \dots + X_n$ sont indépendants et ont pour distribution $\mathrm{Loi}(S_k)$ et $\mathrm{Loi}(S_{n-k})$ respectivement.

$\Rightarrow \mathbb{P}[S_k = a \wedge S_n = 0] = \mathbb{P}[S_k = a] \cdot \mathbb{P}[S_{n-k} = -a]$

et on obtient la formule demandé.

2. Par le thm limite local, on a

$\mathbb{P}[S_n = 0] \sim \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$, $\quad \mathbb{P}[S_k = a] = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{e^{-a^2/2k\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{-x^2/2\alpha\sigma^2}}{\sqrt{\alpha}} (1 + o(1))$$

$\frac{a^2}{k} \sim \frac{x^2 n}{k} \sim \frac{x^2}{\alpha}$

De même $\mathbb{P}[S_{n-k} = -a] = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} \dfrac{e^{-x^2/2(1-\alpha)\sigma^2}}{\sqrt{1-\alpha}} (1 + o(1))$

→ On obtient

$$\mathbb{P}[S_k = a \mid S_n = 0] = \frac{1}{\sigma\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\sqrt{2\pi n}} \, e^{-x^2/2\sigma^2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right)} (1+o(1))$$

3. En remarquant que $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$, le résultat ci-dessus s'écrit

(rappel $x = \frac{a}{\sqrt{n}}(1+o(1))$)

$$\mathbb{P}[S_k = a \mid S_n = 0] = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot n_{\sigma\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

avec une erreur uniforme en a.

C'est un thm local limite pour S_k, conditionné à $S_n = 0$.

Cela implique un TCL ie

$$\text{Loi}\left(\frac{S_k}{\sqrt{n}} \,\Big|\, S_n = 0\right) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right).$$

<u>Exo 3:</u> On a $\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)^n$. Comme $|\varphi_{X_1}(t)| \leq 1$,

pour $n \geq 1$, $|\varphi_{S_n}(t)| \leq |\varphi_{X_1}(t)|$ et $|\varphi_{S_n}(t)|$ est intégrable.

On en déduit que S_n a une densité

$$f_{S_n}(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_1}(t)^n e^{-iyt} \, dt$$ (thm d'inversion de Fourier)

on pose $t = \frac{u}{\sqrt{n}}$, on obtient

$$f_{S_n}(y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-i\frac{y}{\sqrt{n}}u} \, du.$$

Supposons $y/\sqrt{n} \to x \in \mathbb{R}$, l'intégrand converge pour tout $u \in \mathbb{R}$ vers $e^{-u^2\sigma^2/2} \, e^{-ixu}$

Pour justifier la convergence, on coupe l'intégrale en 2 (pas de majorant évident sur tout $\mathbb{R}$):

* Rappelons $\exists\, \delta > 0$: $|\varphi_{X_1}(t)| \leq \exp(-\sigma^2 t^2/4)$ pour $|t| \leq \delta$

donc pour $|u| \leq \delta\sqrt{n}$ $\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \leq \exp(-u^2\sigma^2/4)$ qui est intégrable

Par cv dominée $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}[|u| \leq \delta\sqrt{n}] \, \varphi_{X_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-i\frac{y}{\sqrt{n}}u} du \to \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right)\exp(-ixu)\,du$

* Pour $|u| > \delta\sqrt{n}$, on pose $\eta = \max_{t \geq \delta} |\varphi_{X_1}(t)| < 1$

(existe et est atteint car φ_{X_1} est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$)

on $\left|\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}[|u| > \delta\sqrt{n}]\, \varphi_{X_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\frac{iyu}{\sqrt{n}}}\right|$

$$\leq \eta^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left|\varphi_{X_1}\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right| du = \eta^{n-1}\sqrt{n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |\varphi_{X_1}(t)|\, dt}_{< +\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Finalement, si $\frac{y}{\sqrt{n}} \to x$

$$f_{S_n}(y) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2\sigma^2}{2}\right) \exp(-ixu)\, du = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

formule de trans. de Fourier inverse pour $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Par conséquent

$$\mathbb{P}(S_n \in [x_n + a; x_n + b]) = \int_{x_n+a}^{x_n+b} f_{S_n}(y)\, dy$$

$$\sim \int_{x_n+a}^{x_n+b} \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\, dy$$

indépendant de y !

$$= (b-a)\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

Exo 4: X a densité $(1-|x|)\mathbb{1}[|x| \leq 1]$

On a $\varphi_X(t) = \varphi_{U_1}(t)^2$

avec $\varphi_{U_1}(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} e^{itx}\, dx = \frac{1}{it}\left(e^{\frac{1}{2}it} - e^{-\frac{1}{2}it}\right) = \frac{2}{t}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$

donc $\varphi_X(t) = \left(\frac{2}{t}\right)^2 \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2$

Par la formule d'inversion de Fourier, si Y a densité $\frac{1}{2\pi}\varphi_X(t)$, alors Y a transformée de Fourier

$$\varphi_Y(t) = \frac{1}{2\pi}\int f_Y(x) e^{ixt}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int \varphi_X(x) e^{ixt}\, dt = f_X(-t) = f_X(t)$$

En particulier φ_Y est à support compact.