TD5 - probas discrètes

Exo 1

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{avec} \quad X_i \text{ i.i.d.} \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$$

Soit $r \geq 1$ entier

$$\mathbb{E}\left[S_n(S_n-1)\cdots(S_n-r+1)\right] = \sum_{\substack{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n \\ \text{distinct}}} \mathbb{E}\left[X_{i_1} \cdots X_{i_r}\right]$$

$$= n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda^r$$

Or $\lambda^r = \mathbb{E}\left[Z(Z-1)\cdots(Z-r+1)\right]$ si $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Par la méthode des moments (version "moments factoriels"), on conclut que $X_n \xrightarrow{\text{loi}} Z$.

Exo 2

$$\mathbb{E}\left((T_n)^r\right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n-1} \mathbb{E}\left[X_{i_1} X_{i_1+1} \cdots X_{i_r} X_{i_r+1}\right]$$

Pour $i_1, \dots, i_r \leq n-1$,
Soit $\Pi_{\underline{i}}$ la partition la plus fine telle que $|i_s - i_t| \leq 1 \Rightarrow s$ et t sont dans même part de Π

<u>Claim 1</u> : Fixons Π. Il y a $O(n^{|\Pi|})$ listes $(i_1, \dots, i_r)$ telles que $\Pi_{\underline{i}} = \Pi$.

En effet écrivons $\Pi \stackrel{\underline{i}}{=} \{\{s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,k_1}\}, \{s_{2,1}, s_{2,2}, \dots, s_{2,k_2}\}, \dots \{s_{m,1}, \dots, s_{m,k_m}\}\}$

Pour construire une liste $(i_1, \dots, i_r)$ avec $\Pi_{\underline{i}} = \Pi$, on choisit un indice i_s par blocs de Π, c'est-à-dire $i_{s_{b,1}}$ pour $b \leq m$.

$\to$ dans cette étape, il y a m nombres à choisir entre 1 et n donc $O(n^m) = O(n^{|\Pi|})$ choix

On observe ensuite que $\forall j, |i_{s_{b,j}} - i_{s_{b,1}}| \leq k_b \leq r$.

Il y a au plus $\underbrace{2r+1}_{=O(1)}$ choix pour les autres indices, ce qui prouve le claim. ✓

Claim 2 : Si $\Pi_{\underline{i}}$ contient un singleton, alors

$$\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1} \cdots X_{i_r}X_{i_r+1}] = 0$$

Supposons (ss perte de généralité) $\{i_1\} \in \Pi_{\underline{i}}$

alors $X_{i_1}X_{i_1+1}$ est indépendants de $X_{i_2}X_{i_2+1} \cdots X_{i_r}X_{i_r+1}$

donc $\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1} \cdots X_{i_r}X_{i_r+1}] = \mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1}]\mathbb{E}[X_{i_2} \cdots X_{i_r+1}]$

$= 0.$ ✓

Par ailleurs on a,

$$\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1} \cdots X_{i_r}X_{i_r+1}] = \underset{\text{uniformes en } i_1, \dots, i_r.}{O(1)}$$

* D'après le claim 1, contribution des partitions avec $< \frac{r}{2}$ parts est $o(n^{r/2})$.

$$\mathbb{E}(T_n^r) = \left[\sum_{\substack{\Pi \text{ partition} \\ \text{ss singletons} \\ |\Pi| \geq \frac{r}{2}}} \left(\sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ \Pi_{\underline{i}} = \Pi}} \mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1} \cdots X_{i_r}X_{i_r+1}] \right) \right] + o(n^{r/2})$$

(d'après claim 2) $\longrightarrow$

les seules partitions dans la somme sont
- les partitions en paire si $r = 2r'$ est pair,
- aucune si r est impair

De plus si $\Pi_{\underline{i}} = \{\{s_1, t_1\}, \dots \{s_{r'}, t_{r'}\}\}$

on a $\mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_1+1} \cdots X_{i_r i_r+1}]$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X_{i_{s_1}}X_{i_{s_1}+1}X_{i_{t_1}}X_{i_{t_1}+1}]}_{\neq 0 \text{ ssi } i_{s_1} = i_{t_1}} \cdots \mathbb{E}[X_{i_{s_{r'}}}X_{i_{s_{r'}}+1}X_{i_{t_{r'}}}X_{i_{t_{r'}}+1}]$$

(et égal à σ^4 dans ce cas)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T_n^r] = \sum_{\substack{\Pi \text{ partition} \\ \text{en pair}}} \sum_{\substack{i_{s_1} \cdots i_{s_{r'}} \\ \forall j, j', |i_{s_j} - i_{s_{j'}}| \geq 2}} (\sigma^4)^{r'} + o(n^{r/2})$$

$$= n^{r/2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2r'-1) \cdot (\sigma^4)^{r'} + o(n^{r/2})$$

On obtient $\mathbb{E}[\tilde{T}_n^r] = \dfrac{\mathbb{E}[T_n^r]}{(\sigma^2)^r n^{r/2}} \longrightarrow \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2r'-1) & \text{si } r = 2r' \text{ pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Par la méthode des moments, on obtient
$$\tilde{T}_n \to \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 3

1. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X = e^Z$

Pour toute fonction continue h,

$$\mathbb{E}(h(X)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(e^z)\, e^{-z^2/2}\, dz$$

(chgt variable $x = e^z$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} h(x)\, e^{-(\log x)^2/2} \frac{dx}{x}$$

$\boxed{\begin{array}{l} dx = e^z dz \\ dz = \frac{dx}{x} \end{array}}$

$\Rightarrow X$ a densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\log x)^2/2}}{x} \mathbb{1}_{[0;+\infty]}(x)$

2. f est une densité d'après question 1.

$g \geq 0$ et $\int g(x)\,dx = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{=1 \text{ car } f \text{ densité}} + \int f(x) \sin(2\pi \log(x))\,dx$

$$\int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi \log(x))\,dx \underset{\boxed{\begin{array}{l} x = e^z \\ dx = e^z dz \end{array}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi z)\,dz = 0$$

intégrale d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$

En $+\infty$, $f(x) = o(x^{-k})$ pour tout $k \geq 0$

Donc $\int f(x) x^k < +\infty$ i.e. la variable X de densité f a des moments finis.

Idem pour g

3. $\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[Y^k]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} x^k \, e^{-(\log(x))^2/2} \sin(2\pi \log(x)) \frac{dx}{x}$$

Posons $\log(x) = s + k \qquad \frac{dx}{x} = ds$

$$\sqrt{2\pi}\left(\mathbb{E}[X^k] - \mathbb{E}[Y^k]\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{k(s+k)} \, e^{-s^2/2 - k^2/2 - sk} \sin(2\pi s + 2\pi k) \, ds$$

$$= e^{+k^2/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/2} \sin(2\pi s) \, ds \underset{\substack{\uparrow \\ \text{intégrale} \\ \text{d'une fonction} \\ \text{impaire}}}{=} 0$$

Conclusion $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k] \quad \forall k \geq 1$ entier

(et donc, X n'est pas déterminé par ses moments)