TD 4 Probas discrètes

Exercice 1

Gaussiennes

solution 1 $\qquad \mathbb{E}[e^{\omega X}] = \exp\left(\cancel{\mu}\,\omega + \frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right) < +\infty$

$\forall \omega \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow X$ dét / mom^{ts}

solution 2 (pour Gaussienne centré réduite)

$$\mathbb{E}[X^k] = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k'-1) & \text{si } k = 2k' \text{ est pair} \end{cases}$$

Dans les deux cas $\mathbb{E}[X^k] \leq k!$

$\Rightarrow X$ dét / moments

Poisson $\qquad \mathbb{E}[e^{\omega X}] = \exp(\lambda(e^{\omega} - 1)) < +\infty$

$\forall \omega \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow X$ dét / moments

Exponentielle $\qquad \mathbb{E}[e^{\omega X}] = \dfrac{1}{1 - \frac{\omega}{\lambda}}$

est fini pour $\omega \neq \lambda$. (en particulier autour de 0)

$\Rightarrow X$ dét par ses moments

Géométrique $\qquad \mathbb{E}[e^{\omega X}] = \dfrac{p e^{\omega}}{1 - (1-p)e^{\omega}}$

fini pour $\omega \notin \{-\log(1-p) + 2ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow X$ dét. par ses moments

Puissance d'une Gaussienne $\quad X = Z^k \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

pour $k = 2$ $\qquad \mathbb{E}[X^r] = \dfrac{(2r)!}{2^r\, r!} \underset{\text{Stirling}}{\leq} \dfrac{(2r)^{2r}}{r^r} c^r \leq r^r (c')^r$

$\leq r!(c'')^r$

$\Rightarrow X = Z^2$ est dét par ses moments pour $k > 2$, r pair $r = 2r'$

$$\mathbb{E}[X^r] = \mathbb{E}[X^{2kr'}] = \frac{(2kr')!}{2^{kr'}(kr')!} \approx \frac{(2kr')^{2kr'}}{(kr')^{kr'}} \cdot \text{termes exp en } r'$$

$$= (r')^{kr'} \cdot \underset{\text{en } r'}{\text{termes exp}} \gg C^{r'} \, r'! = (r')^{2r'} \cdot \text{termes exponentiels}$$

pour toute constante C

→ le critère ne s'applique pas...

(en fait, Z^4 est dét / ses moments mais pas les autres Z^k, $k > 2$)

~~Exercice 2~~