Processus stochastiques discrets
TD n° 3

Exercice 1 : Soit $A_i = \{\sigma(i) = i, \sigma(i+1) = i+1\}$, $i \leq n-1$

X_n = nb de paires de pts fixes consécutifs

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}[A_i]$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_i] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En utilisant la méthode du premier moment, on obtient $\mathbb{P}[X_n = 0] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 2 : Soit $A_i = \{\omega_i = 0, \omega_{i+1} = 1\}$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}[A_i]$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_i] = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{4} = \frac{n-1}{4}$$

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{1 \leq i, j \leq n-1} \mathrm{Cov}[\mathbb{1}A_i; \mathbb{1}A_j].$$

Or $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}A_i; \mathbb{1}A_j) = 0$ si $|i-j| \geq 2$

les évènements correspondants sont indépendants

Si $|i-j| < 1$, $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}A_i; \mathbb{1}A_j) \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}A_i \mathbb{1}A_j] \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}A_i] = \frac{1}{4}$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Var}(X_n) \leq \underbrace{3(n-1)}_{\text{nb termes ac } \mathrm{cov} \neq 0} \cdot \frac{1}{4}.$$

On note que $\mathrm{Var}(X_n) = o\left(\mathbb{E}(X_n)^2\right)$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, cela implique $\frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} \longrightarrow 1$ en proba

i.e. $\frac{X_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{4}$.

Exercice 3 : a. Supposons par l'absurde $\mathbb{P}[X \leq \mu] = 0$ (*)

Alors $X - \mu \geq 0$ p.s. Mais $\mathbb{E}[X-\mu] \leq 0$ par hypothèse

$\Longrightarrow$ $X - \mu = 0$ p.s. i.e. $X = \mu$ p.s.

$\rightarrow$ contradiction avec (*)

Conclusion : $\mathbb{P}[X \leq \mu] > 0$.

b. Supposons $X \in \mathbb{N}$ p.s. et prenons $\mu \in]E(X), 1[$.

↑ non vide par hypothèse

En utilisant a., on obtient $\mathbb{P}[X \leq \mu] > 0$

Mais comme $X \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]E(X), 1[\subseteq [0; 1[$

$(X \leq \mu) \Longleftrightarrow (X = 0)$

Conclusion $\mathbb{P}[X = 0] > 0$.

Exercice 4 : $\mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i v_i\right\|^2\right] = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \underbrace{\mathbb{E}[X_i X_j]}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

$= \sum_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\substack{=1 \\ \text{car } v_i \text{ de norme } 1}} = n$

D'après l'exo 3, $\mathbb{P}\left[\left\|\sum_{i=1}^{n} X_i v_i\right\|^2 \leq n\right] > 0$

Il existe donc $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tq $\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i\right\|^2 \leq n$

i.e. tq $\left\|\sum \varepsilon_i v_i\right\| \leq \sqrt{n}$

Exercice 5 : $\sigma_n \in_u S_n$

1. Soit $A_i = \{ \sigma_n(i) = i \}$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}[A_i] = \# \text{ pts fixes de } \sigma_n.$$

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1.$$

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \underbrace{n \cdot \frac{1}{n}}_{\text{contribution des } n \text{ termes où } i=j} + \underbrace{n \cdot (n-1) \frac{1}{n(n-1)}}_{\text{contribution des } n(n-1) \text{ termes avec } i \neq j} = 2$$

Donc $\text{Var}(X_n) = 2 - 1^2 = 1$. n'est pas un $o(\mathbb{E}(X_n)^2)$.

$\rightarrow$ la méthode du 2nd moment ne s'applique pas.

2. Si $t > -\mathbb{E}(Y)$, on a

$$\mathbb{P}[Y \geq \mathbb{E}(Y) + u] \underset{\text{inclusion des événements car } \mathbb{E}(Y)+u+t>0}{\leq} \mathbb{P}\left[(Y+t)^2 \geq (\mathbb{E}(Y)+u+t)^2\right]$$

$$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}((Y+t)^2)}{(\mathbb{E}(Y)+u+t)^2} = \frac{\sigma^2 + (t+\mathbb{E}(Y))^2}{(\mathbb{E}(Y)+t+u)^2}$$

on pose $x := t + \mathbb{E}(Y)$ et on cherche à minimiser $\frac{\sigma^2 + x^2}{(x+u)^2}$ pour $x > 0$. Une analyse de fonctions montre que le minimum est atteint pour $x = \frac{\sigma^2}{u}$ et vaut $\frac{\sigma^2}{u^2+\sigma^2}$.

3. On applique la question précédente avec $u = 1$, sachant que $\sigma^2 = 1$ (voir 1.)

$$\mathbb{P}[X_n \geq 2] \leq \frac{1}{2}.$$