TD 9 - Probas discrètes

Exo 1 :

1. Non, φ n'est pas continue. En effet si $f_n \equiv -\frac{1}{n}$ et $f \equiv 0$, alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}$, $\varphi(f_n) = 0$ $\forall n \geq 1$, et $\varphi(f) = 1$.

Soit $E = \{f \in \mathcal{C} : f(x) \neq 0$ pour presque tout $x \in [0;1]\}$

Soit $f_n \in \mathcal{C}$, $f \in E$ avec $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}$

On a $\mathbb{1}[f_n(t) \geq 0] \to \mathbb{1}[f(t) \geq 0]$ $\forall t : f(t) \neq 0$, et donc pour presque tout t dans $[0;1]$.

Cela implique $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$.

Donc φ continue en tout $f \in E$.

2. $\mathbb{E}\left[\text{Leb}(\{t : B_t = 0\})\right] = \int_0^1 \underbrace{\mathbb{P}(B_t = 0)}_{\substack{0 \text{ pour } t>0 \\ \text{car } B_t \sim \mathcal{N}(0,t^2)}} dt = 0.$

Comme $\text{Leb}\{t ; B_t = 0\} \geq 0$ p.s., on a $\text{Leb}(\{t : B_t = 0\}) = 0$ p.s.

3. On a $W_n \xrightarrow{\text{loi}} \sigma B$ (thm de Donsker)

Comme $B \in E$ p.s. (question 2), et φ continue en tout $f \in E$ (question 1), cela implique $\varphi(W_n) \xrightarrow{\text{loi}} \varphi(\sigma B) = \varphi(B)$

En admettant $\frac{1}{n}|\{k \leq n : S_k \geq 0\}| \sim \underbrace{\text{Leb}(W_n(t) \geq 0)}_{\varphi(W_n)}$, (*)

on en déduit que $\frac{1}{n}|\{k \leq n : S_k \geq 0\}| \xrightarrow{\text{loi}} \varphi(B)$.

indépendant de $\text{loi}(X_1)$.

Note : Si on ne veut pas admettre (*), on peut travailler avec W_n' dans l'espace de Skorokhod

on a $\frac{1}{n}|\{k \leq n : S_k \geq 0\}| = \text{Leb}(W_n'(t) \geq 0)$

$W_n' \xrightarrow{\text{loi}} B$ dans $\mathcal{D}$

et $\varphi' : \mathcal{D} \to [0;1]$, $f \mapsto \int_{[0;1]} \mathbb{1}\{f(t) \geq 0\} dt$ est continue* en tout $f \in E = \{g \text{ continue} : g(x) \neq 0 \text{ pour presque tout } x\} \subseteq \mathcal{D}$

---

* la même preuve que 1 marche car si g est continue, $g_n \to g$ dans $\mathcal{D} \Rightarrow \|g_n - g\|_\infty \to 0 \Rightarrow g_n \to g$ point par point

Exo 2 :

1. $\sum_{p\geq 1} 2^{p\delta\alpha} \underbrace{\mathbb{E}\left[U_p(F)^\alpha\right]} \leq \sum_{p\geq 1} 2^{p\delta\alpha}\left(\beta 2^{-p\gamma}\right)$

$\leq \beta \sum_{p\geq 1} \left(2^{\delta\alpha-\gamma}\right)^p < +\infty$

$\leq \liminf \|U_p(F_n)\|_\alpha^\alpha$

$\leq \beta 2^{-p\gamma}$

Fatou

+thm de repr. de Skorokhod

somme géom. de raison $2^{\delta\alpha-\gamma} < 1$ (car $\delta < \frac{\gamma}{\alpha}$)

~~En faisant tendre $n\to+\infty$ on obtient 1.~~

2. On a $\mathbb{E}\left[\sum_{p\geq 1} 2^{p\delta\alpha} U_p(F)^\alpha\right] = \sum_{p\geq 1} \mathbb{E}\left[2^{p\delta\alpha} U_p(F)^\alpha\right] < +\infty$

Fubini pr variables positives

d'après 1.

Donc $\sum_{p\geq 1} 2^{p\delta\alpha} U_p(F)^\alpha < +\infty$ p.s.

En appelant S le membre de gauche, on a

$$\forall p\geq 1 \quad U_p(F) \leq S\cdot 2^{-p\delta}$$

3. On utilise le lemme du cours

$$\omega(F, 2^{-r}) \leq 2\sum_{p\geq r} U_p(F) \leq 2S\frac{2^{-r\delta}}{1-2^{-\delta}}$$

si $2^{-r-1} \leq \varepsilon \leq 2^{-r}$, on a

$$\omega(F,\varepsilon) \leq \omega(F,2^{-r}) \leq 2S\frac{2^{-r\delta}}{1-2^{-\delta}} \leq 2S\frac{(2\varepsilon)^\delta}{1-2^{-\delta}}$$

$$\leq C_\delta\, \varepsilon^\delta \quad \text{avec } C_\delta = \frac{2^{\delta+1} S}{1-2^{-\delta}}$$

variable aléatoire (ind. de ε)

Vrai $\forall \varepsilon>0$, $\Rightarrow$ F est δ-Höldérienne p.s.

4. On a montré en cours que W_n vérifie (1) avec $\alpha=4$ et $\gamma=1$ et $W_n \xrightarrow{\text{loi}} B$

En appliquant 3, cela montre que B est δ-Höldérien p.s. $\forall \delta < \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{4}$

5. Prenons W_n une marche aléatoire simple renormalisée

On a $W_n \xrightarrow{\text{loi}} B$ (Donsker) et pour $\alpha = 2k$ entier pair, ns, nt entier

$$\mathbb{E}\left(|W_n(s)-W_n(t)|^{2k}\right) = n^{-k}\,\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=ns+1}^{nt} X_j\right)^{2k}\right)$$

$$= n^{-k}\sum_{\substack{\text{partition}\\ \Pi}}\left(\sum_{\substack{ns<j_1,\dots,j_{2k}\leq nt\\ \Pi_J = \Pi}} \mathbb{E}\left(X_{j_1}\cdots X_{j_{2k}}\right)\right)$$

où $a \sim_{\Pi_J} b$ ssi $j_a = j_b$

Or $\begin{cases} \bullet \text{ Seules les parts sans singletons survivent} \\ \bullet\ \mathbb{E}(X_{j_1} \cdots X_{2k}) \leq 1 \\ \bullet\ \#\{(j_1 \cdots j_{2k}) : \Pi_{j} = \Pi\} \leq n^{|\Pi|} |s-t|^{|\Pi|} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(|W_n(s)-W_n(t)|^{2k}\right) \leq \sum_{\substack{\Pi \text{ part} \\ \text{ss singletons}}} n^{|\Pi|-k} |s-t|^{|\Pi|}$$

on note $|\Pi| - k \leq 0$ si Π n'a pas de singletons

et $|s-t| \geq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $n^{|\Pi|-k} \leq |s-t|^{k-|\Pi|}$

et on obtient $\mathbb{E}\left(|W_n(s)-W_n(t)|^{2k}\right) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nombre de partitions} \\ \text{d'ensemble de tailles } 2k}}{B_{2k}} |s-t|^{k}$

i.e. (1) est vérifié avec $\alpha = 2k$ et $\delta = k-1$

D'après 3, B est δ-Höldérien $\forall \delta < \frac{\delta}{\alpha} = \frac{k-1}{2k}$.

Vrai pour tout $k \geq 0$. Donc

B est δ Höldérien $\forall \delta < \frac{1}{2}$.

<u>Exo 3</u>: 1. Méthode du 1er moment

Soit $A_j = \{\{j, j+1\} \subseteq E_n\}$, $X_n = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{1}[A_j]$ nb paires d'entiers consécutifs ds E_n

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}[A_j] = (n-1)p^2$$

Si $p \sim n^{-1/2-\varepsilon}$ alors $\mathbb{E}[X_n] \to 0$ et $\mathbb{P}[X_n = 0] \to 1$

car $X_n \in \mathbb{Z}$ p.s.

2. Méthode du 2nd moment

$$\mathrm{Var}(X_n) = \sum_{1 \leq j,k \leq n-1} \mathrm{Cov}(A_j, A_k) = \underbrace{(n-1)\mathrm{Var}(A_1)}_{\text{termes } j=k} + \underbrace{2(n-2)\mathrm{Cov}(A_1, A_2)}_{\text{termes } |j-k|=1}$$

(autres termes sont nulles)

or $\mathrm{Var}(A_1) = p^2(1-p^2)$ et $\mathrm{Cov}(A_1, A_2) = p^3 - p^4$

$$\mathrm{Var}(X_n) = (n-1)p^2(1-p^2) + 2(n-2)(p^3-p^4)$$

$$= O(\underbrace{np^3}_{n^{-1/2+3\delta}}) = o(\underbrace{n^2p^4}_{n^{1+4\delta}}) = o(\mathbb{E}(X_n)^2)$$

La méthode du 2nd moment s'applique et $\mathbb{P}[X_n = 0] \to 0$

quand $n \to +\infty$.

Exo 4 :

1. $$\mathbb{P}[T_n = nb] = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}[y_1 + \cdots + y_n = nb]\, dQ(y_1) \cdots dQ(y_n)$$
$$= \frac{1}{\mathbb{E}(e^{\theta^* X_1})^n} \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}[x_1 + \cdots + x_n = nb]\, e^{\theta^*(x_1 + \cdots + x_n)} dP(x_1) \cdots dP(x_n)$$
$$= \frac{e^{\theta^* bn}}{\mathbb{E}(e^{\theta^* X_1})^n} \cdot \mathbb{P}[S_n = nb]$$

2. Y et X ont le même support, donc Y a aussi période maximale 1. On peut appliquer le théorème local limite à
$$T_n - bn = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b).$$
($Y_i - b$ est centré car $\mathbb{E}[Y_i] = \int_{\mathbb{R}} y\, dQ(y) = b$)

$$\mathbb{P}[T_n - bn = 0] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{où} \quad \sigma = E((Y_i - b)^2)$$

On obtient $$\mathbb{P}[S_n = nb] \sim e^{n\underbrace{(\Lambda(\theta^*) - \theta^* b)}_{\text{cette quantité est } -\Lambda^*(b) = -\sup(b\theta - \Lambda(\theta))}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}$$

Note : σ peut aussi s'exprimer en fonction de Λ.

en dérivant sous l'espérance $$M''(\theta) = \mathbb{E}(X_1^2 e^{\theta X_1})$$
et donc $$\mathbb{E}[Y_1^2] = \frac{M''(\theta^*)}{M(\theta^*)}$$

par ailleurs $$\Lambda''(\theta) = \left(\frac{M'(\theta)}{M(\theta)}\right)' = \frac{M''(\theta)}{M(\theta)} - \left(\frac{M'(\theta)}{M(\theta)}\right)^2$$

d'où $$\Lambda''(\theta^*) = \mathbb{E}[Y_1^2] - \mathbb{E}(Y_1)^2 = \sigma^2.$$

Finalement $$\mathbb{P}[S_n = nb] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi \Lambda''(\theta^*) n}}\, e^{-n\Lambda^*(b)}.$$

On note que l'inégalité $\mathbb{P}[S_n = nb] \leq \mathbb{P}[S_n \geq bn] \leq e^{-n\Lambda^*(b)}$ est donc quasi-optimale.