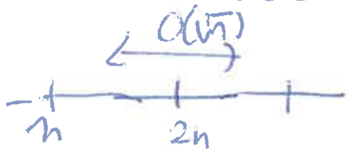
# TD8 - Probas discrètes

**Exo 1** $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $X_i \sim \text{Poisson}(2)$

Soit $S_n' = S_n - 2n = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(X_i - 2)}_{X_i'}$

- $P(S_n = n)$ on est hors de la zone typique du TCL




$\rightarrow$ on utilise une inégalité de gde déviation

$$P[S_n = n] \leq P[S_n \leq n] \leq e^{-n \sup_{\theta \in \mathbb{R}} (\theta - \Lambda(\theta))}$$

or $\Lambda(\theta) = \log(M(\theta)) = \log\left(e^{2(e^{\theta}-1)}\right) = 2(e^{\theta} - 1)$

on cherche le supremum

$$\Lambda'(\theta^*) = 2e^{\theta^*} = 1$$

$$\rightsquigarrow \theta^* = -\log 2.$$

$$\Lambda(\theta^*) = 2\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = -1$$

$$P[S_n = n] \leq e^{-n(-\log 2 + 1)} \leq e^{(1-\log 2)n}$$

- De m $P[S_n \leq n] \leq e^{-n(1-\log 2)}$

- $P[S_n = 2n] = ?$ On est dans le régime TCL
C'est une proba ponctuelle

$\longrightarrow$ on utilise le théorème local limite*

$\sigma = \sqrt{2}$

$$P[S_n = 2n] = P[S_n' = 0] = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

*période 1
max 1
car $X_i$ charge tout $\mathbb{Z}$

• $\mathbb{P}[S_n \geq 2n]$. On utilise le TCL $\frac{S_n - 2n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{\text{loi}} Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}[S_n \geq 2n] = \mathbb{P}\left[\frac{S_n - 2n}{\sqrt{2n}} \geq 0\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}[Z \geq 0] \underset{\frac{1}{2}}{=} .$$

Pour connaître la vitesse de cv, on utilise le thm de Berry-Esseen appliquée à $-S_n'$

$$\left|\mathbb{P}\left[\frac{-S_n'}{\sigma\sqrt{n}} \leq 0\right] - \mathbb{P}[Z \leq 0]\right| \leq \frac{C\cdot(2+8e^{-2})}{2^{3/2}\sqrt{n}}$$

où $C \leq 1/2$ est une constante universelle.

Donc

$$\left|\mathbb{P}[S_n \geq 2n] - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{C\cdot(2+8e^{-2})}{2^{3/2}\sqrt{n}}$$

$$\leq \left|\mathbb{P}\left[\frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} > 0\right] - \mathbb{P}[Z>0]\right| + \left|\mathbb{P}[S_n = 2n]\right|$$

$$\leq \frac{C'}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

borné par $\frac{1}{2\sqrt{\pi n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$C' = \frac{C(2+8e^{-2})}{2^{3/2}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

• $\mathbb{P}[S_n = 2n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor]$. On encore dans la zone du TCL et on cherche une proba partielle

$$\mathbb{P}[S_n = 2n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor] = \mathbb{P}[S_n' = -\lfloor\sqrt{n}\rfloor]$$

thm local limite

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} e^{-\left(-\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}\right)^2/4} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\left(e^{-1/4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\left(e^{-1/4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$\circ\ \mathbb{P}\left(S_n \geq 2n - \sqrt{n}\right)$ . dans la zone du TCL

$$= \mathbb{P}\left[\frac{S_n - 2n}{\sqrt{2n}} \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{TCL} \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}\right].$$

La vitesse de cv est donnée par Berry-Esseen appliqué à $-S_n'$

$$\left|\mathbb{P}\left[\frac{-S_n'}{\sqrt{2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right| \leq \frac{C \cdot (2 + 8e^{-2})}{2^{3/2}\sqrt{n}}$$

~~* Si $\sqrt{n}$ est $\notin \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(S_n \geq 2n - \sqrt{n}) = \mathbb{P}(S_n > 2n - \sqrt{n})$~~

~~et $\left|\mathbb{P}[S_n \geq 2n - \sqrt{n}] - \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]\right| \leq \frac{C(2+8e^{-2})}{2^{3/2}\sqrt{n}}$~~

~~* Si $\sqrt{n} \in \mathbb{Z}$, il faut ajouter $\mathbb{P}[S_n = 2n - \sqrt{n}]$ au terme d'erreur~~

$$\left|\mathbb{P}[S_n \geq 2n - \sqrt{n}] - \mathbb{P}\left[Z \geq \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]\right| \leq \frac{C(2 + 8e^{-2})}{2^{3/2}\sqrt{n}}$$

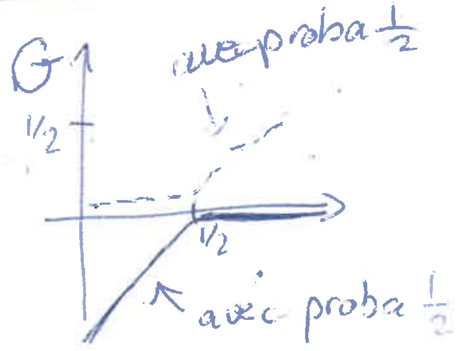
même borne que ci-dessus

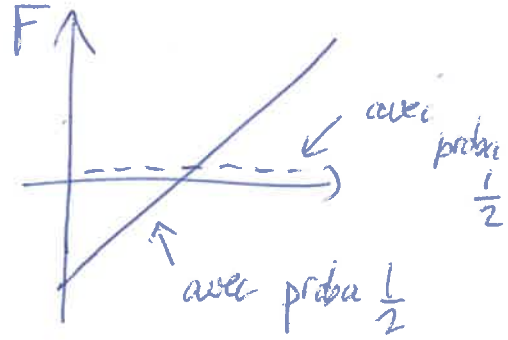
~~$\leq \frac{C'}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n}\right)$~~

~~avec $C' = \frac{C(2+8e^{-2})}{2^{3/2}} + \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi}}$~~

---

Exo 2




Soit $t \in (0;1)$.

$$\mathrm{Loi}(F(t)) = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_{x-\frac{1}{2}} = \mathrm{Loi}(G(t)).$$

2. Prenons $s=0$ ; $t=1$.

$$\text{Loi}\left(F(s),F(t)\right)=\frac{1}{2}\delta_{(0,0)}+\frac{1}{2}\delta_{(-\frac{1}{2};\frac{1}{2})}$$

$$\neq$$

$$\text{Loi}\left(G(s),G(t)\right)=\frac{1}{2}\delta_{(-\frac{1}{2},0)}+\frac{1}{2}\delta_{(0;\frac{1}{2})}.$$

---

## Exo 3

1.) Si $j=0$, l'égalité $\left(H_d(\frac{i}{2d})\right)_{i\neq j}=\left(K_d(\frac{i}{2d})\right)_{i\neq j}$ a lieu p.s par construction.

On considère $j\neq 0$.

Soit $(x_i)_{\substack{0\leq i\leq 2d\\ i\neq j}}\in\{-1;1\}^{2d}$, on a

$$\mathbb{P}\left[\forall i\neq j\ H_d\left(\frac{i}{2d}\right)=x_i\right]=\mathbb{P}\left[\forall \underset{i>0}{i\neq j},\ B_i=x_i\wedge\prod_{i=1}^{2d}B_i=x_0\right]$$

$$=\mathbb{P}\left[\forall \underset{i>0}{i\neq j},\ B_i=x_i\wedge B_j=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{2d}x_i\right]$$

car $(B_1,\dots,B_j,\dots,B_{2d})\overset{\text{loi}}{=}(B_1,\dots,-B_j,\dots,B_{2d})=\left(\frac{1}{2}\delta_{-1}+\frac{1}{2}\delta_1\right)^{\otimes 2d}$

$$\rightarrow=\mathbb{P}\left[\forall \underset{i>0}{i\neq j}\ B_i=x_i\wedge B_j=-\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{2d}x_i\right]$$

$$=\mathbb{P}\left[\forall i\neq j,\ K_d\left(\frac{i}{2d}\right)=x_i\right]$$

On a donc l'égalité en loi recherchée.

---

2.) Soit $t_1<\dots<t_d$.

Pour $k\in[\![1;\dots;d]\!]$, $\exists\ i_k$ tq $t_k\in\left[\frac{i_k}{2d};\frac{i_k+1}{2d}\right]$

Soit $j\in\underbrace{[\![0;2d]\!]\setminus\left(\bigcup_k\{i_k;i_k+1\}\right)}_{\text{non vide}}$

non vide car $[\![0;2d]\!]$ a taille $2d+1$ et l'union taille au plus $2d$

Alors on peut exprimer $\left(H_d(t_1),\dots,H_d(t_d)\right)$ en fonction de $\left(H_d\left(\frac{i}{2d}\right)\right)_{\substack{0\leq i\leq 2d\\ i\neq j}}$ car $H_d$ est affine par morceaux

La même expression donne $\left(K_d(t_1),\dots,K_d(t_d)\right)$ en fonction de $\left(K_d(\frac{i}{2d})\right)_{i\neq j}$.

On peut donc déduire de 1. que

$$\left(H_d(t_1), \dots, H_d(t_d)\right) \overset{loi}{=} \left(K_d(t_1) \dots K_d(t_d)\right)$$

3.) On a

$$\mathbb{P}\left[\forall i \geq 0,\ H_d\left(\frac{i}{2d}\right) = 1\right] = \mathbb{P}\left[\forall i \neq 0,\ B_i = 1\right] = \frac{1}{2^{2d}}$$

Par ailleurs $\prod_{i=0}^{2d} K_d\left(\frac{i}{2d}\right) = -\prod_{i=1}^{2d} B_i^2 = -1$ p.s.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\forall i \geq 0,\ K_d\left(\frac{i}{2d}\right) = 1\right) = 0.$$

$H_d$ et $K_d$ ont des lois différentes.

---

Exo 4:

1. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (1), $\exists K > 0$ entier tq

$$\sup_{n \geq 1} w\left(f_n, \frac{1}{K}\right) \leq \varepsilon \qquad (1)$$

Par convergence ponctuelle, $\exists n_0$ tq

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left|f_n\left(\frac{i}{K}\right) - f\left(\frac{i}{K}\right)\right| \leq \varepsilon \quad \forall i \in \{0; \dots; K\} \quad (2)$$

Par ailleurs pour $\delta > 0$ et $x, y \in [0;1]$ avec $|x-y| \leq \delta$

on a $|f(x) - f(y)| = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{|f_n(x) - f_n(y)|}_{\leq w(f_n, \delta)} \leq \sup_{n \geq 1} w(f_n, \delta)$

donc $w(f, \delta) \leq \sup_{n \geq 1} w(f_n, \delta)$. (3)

Pour tout $t \in [0;1]$, on a

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \left|f_n(t) - f_n\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right) - f\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right)\right| + \left|f(t) - f\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right)\right|$$

$$\leq w(f_n, \delta) + w(f, \delta) + \left|f_n\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right) - f\left(\frac{\lfloor Kt \rfloor}{K}\right)\right|$$

$$\leq 3\varepsilon \text{ pour } n \geq n_0 \text{ d'après (1), (2), (3).}$$

2. $f_n$ $\ell$-lipschitzienne $\Rightarrow$ $\omega(f_n, \delta) \leq \delta \cdot \ell$

$\Rightarrow \sup\limits_{n \geq 1} \omega(f_n, \delta) \leq \delta \cdot \ell$.

et $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{n \geq 1} \omega(f_n, \delta) \longrightarrow 0$ comme demandé,

3. $F_n$ $L$-lipschitzienne $\Rightarrow \omega(F_n, \delta) \leq \delta \cdot L$

$\Rightarrow \mathbb{P}[\omega(F_n, \delta) \geq \varepsilon] \leq \mathbb{P}[\delta \cdot L \geq \varepsilon] = \underbrace{\mathbb{P}[L \geq \frac{\varepsilon}{\delta}]}_{\text{tend vers } 0 \text{ quand } \delta \to 0}$

donc $\sup\limits_{n \geq 1} \mathbb{P}[\omega(F_n, \delta) \geq \varepsilon] \longrightarrow 0$ quand $\delta \to 0$.