TD7
Probas Discrètes

Exo 1 :

$$\mathbb{P}(p \in I_\alpha) = \mathbb{P}\left(p \leq \frac{S_n}{n} + \frac{\sigma \cdot Z_\alpha}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{n}} \geq -\sigma \cdot Z_\alpha\right)$$

or $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec X_i i.i.d. $\sim$ Bernoulli (p)

On pose $X_i' = p - X_i$ $\quad S_n' = \sum_{i=1}^{n} X_i' = np - S_n$

$$\mathbb{P}(p \in I_\alpha) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n'}{\sqrt{n}} \leq \sigma \cdot Z_\alpha\right)$$

$$\overset{\text{thm de Berry-Esseen}}{=} \underbrace{\mathbb{P}(\sigma Z \leq \sigma \cdot Z_\alpha)}_{1-\alpha} + \text{Erreur}$$

avec $|\text{Erreur}| \leq \frac{C \cdot e}{\sigma^3 \sqrt{n}}$

Ici $C = \frac{1}{2}$ $\quad e = p \cdot |p-1|^3 + (1-p)|p|^3$

$$= p(1-p)\left((p-1)^2 + p^2\right)$$

$$= p(1-p)(2p^2 - 2p + 1)$$

$\sigma^2 = p(1-p)$ $\quad n = 1000$

pour $p = \frac{1}{2}$ $\quad$ Erreur $\simeq 0{,}016 = 1{,}6\,\%$

(niveau réel pour $\alpha = 5\%$) $\in [3{,}5\%, 6{,}5\%]$

pour $p = 0{,}1$ $\quad$ Erreur $\simeq 0{,}043 = 4{,}3\%$

pour $\alpha = 5\%$, niveau réel du test $\in [0{,}7\%, 9{,}3\%]$

Exo 2 :

$$\mathbb{P}\left[S_n = \frac{n}{2}\right] = \frac{\binom{n}{n/4}}{2^n}$$

$\binom{n}{n/4}$ ← nb de suites dans $\{-1;1\}^n$ de sommes $\frac{n}{2}$ (i.e. contenant $\frac{n}{4}$ fois -1 et $\frac{3n}{4}$ fois $+1$)

2^n ← nb total de suites dans $\{-1;1\}^n$

Stirling $\binom{n}{n/4} = \frac{n!}{(n/4)!\left(\frac{3n}{4}\right)!} \sim \frac{n^n}{\left(\frac{n}{4}\right)^{n/4}\left(\frac{3n}{4}\right)^{\frac{3n}{4}}} \frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi\frac{n}{4}}\sqrt{2\pi\frac{3n}{4}}} = 4^{n/4} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3n/4} \cdot \frac{\sqrt{6\pi n}}{4}$

$$\binom{n}{n/4} \sim \left(4^{1/4}\left(\frac{4}{3}\right)^{3/4}\right)^n \cdot \sqrt{\frac{3}{8}\pi n} = \left(\frac{4}{3^{3/4}}\right)^n \sqrt{\frac{3}{8}\pi n}$$

$$\mathbb{P}\left[S_n = \frac{n}{2}\right] \sim \left(\frac{2}{3^{3/4}}\right)^n \sqrt{\frac{3}{8}\pi n} \quad (1);$$

Grande deviations

$$\frac{1}{n}\log\left(\mathbb{P}\left[S_n \geq \frac{n}{2}\right]\right) \longrightarrow -\sup_{\theta \in \mathbb{R}}\left(\frac{1}{2}\theta - \Lambda(\theta)\right)$$

avec $\Lambda(\theta) = \log \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right] = \log\left(\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})\right)$

On cherche θ^* réalisant le sup. Il vérifie

$\Lambda'(\theta^*) = \frac{1}{2}$ or $\Lambda'(\theta) = \dfrac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{e^{\theta} + e^{-\theta}}$

Donc $e^{\theta^*} - e^{-\theta^*} = \frac{1}{2}\left(e^{\theta^*} + e^{-\theta^*}\right) \Rightarrow e^{-\theta^*} = \frac{1}{3}e^{\theta^*}$

i.e. $e^{2\theta^*} = 3$

$\theta^* = \frac{1}{2}\log(3)$

et $\Lambda(\theta^*) = \log\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$$-\frac{1}{2}\theta^* + \Lambda(\theta^*) = -\frac{1}{4}\log(3) + \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \log\left(\frac{1}{3^{1/4}}\right) + \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{3^{1/2}}\right) + \log(4)$$

$$= \log\left(\frac{2}{3^{3/4}}\right)$$

On obtient $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left(\mathbb{P}\left[S_n \geq \frac{n}{2}\right]\right) = \log\left(\frac{2}{3^{3/4}}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après (1)}}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \mathbb{P}\left[S_n = \frac{n}{2}\right]$

Exo 3 :

Pour $\theta \geq 0$, $\mathbb{P}[P \geq A] = \mathbb{P}\left[e^{\theta P} \geq e^{\theta A}\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(Markov)}}}{\leq} \dfrac{\mathbb{E}\left[e^{\theta P}\right]}{e^{\theta A}}$

Or $\mathbb{E}\left[e^{\theta P}\right] = \sum_{k \geq 0} \frac{e^{-1}}{k!} e^{\theta k} = \exp\left(e^{\theta} - 1\right)$

Donc $\mathbb{P}[P \geq A] \leq \exp\left(e^{\theta} - 1 - \theta A\right)$

On peut prendre $\theta = 1$ et on obtient $\mathbb{P}[P \geq A] \leq \dfrac{e^e}{e^{A-1}}$

ou mieux $\theta = \log(A)$ (c'est optimal car ça annule la dérivée de $\theta \mapsto e^{\theta} - 1 - \theta A$)

$$\mathbb{P}[P \geq A+1] \leq \exp(A - 1 - A \log A) = \frac{e^{A-1}}{A^A}$$

Exo 4

Quand $X_1 \to \pm\infty$, on $|X_1|^p \ll e^{-\varepsilon X_1} + e^{\varepsilon X_1}$ $\forall \varepsilon > 0$, $p > 0$

Donc $\mathbb{E}[|X_1|^p] < +\infty$ si $\mathbb{E}[e^{-\varepsilon X_1}], \mathbb{E}[e^{\varepsilon X_1}] < +\infty$.

~~Par ailleurs, pour~~ $\cancel{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \varepsilon}$

~~on~~ $\cancel{\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}\left[\frac{|X_1 z|^k}{k!}\right] \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{E}[(X_1 \varepsilon)^k]}{k!} + \frac{\mathbb{E}[(-X_1 \varepsilon)^k]}{k!}}$

De même $\mathbb{E}[|X_1|^p e^{|u||X_1|}] < +\infty$ pour $u \in]-\varepsilon; \varepsilon[$.

On peut donc "dériver sous l'espérance"
et pour $\theta \in]-\varepsilon; \varepsilon[$

$$M'(\theta) = \mathbb{E}[X_1 \exp(\theta X_1)]$$
$$\vdots$$
$$M^{(p)}(\theta) = \mathbb{E}[X_1^p \exp(\theta X_1)]$$

en posant $\theta = 0$, on obtient $M^{(p)}(0) = \mathbb{E}[X_1^p]$

Comme M est C^∞ autour de 0, on a

$$M(\theta) = M(0) + \theta M'(0) + o(\theta)$$

or $M(0) = 1$ $\quad M'(0) = \mathbb{E}[X_1]$

donc $\Lambda(\theta) = \log M(\theta) = \theta \mathbb{E}[X_1] + o(\theta)$

si $b > \mathbb{E}[X_1]$, $b\theta - \Lambda(\theta) = (b - \mathbb{E}(X_1))\theta + o(\theta)$
est strictement positif pour $\theta > 0$ petit.
comme $\theta \mapsto b\theta - \Lambda(\theta)$ est concave et vaut 0 en 0,
cela implique $b\theta - \Lambda(\theta) < 0$ pour $\theta < 0$.

Donc $\theta^* > 0$ et $\Lambda^*(b) > 0$.

(et la borne de Chernoff décroit exponentiellement vite vers 0)