UNIVERSITÉ DE LORRAINE

FST FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES Nancy

Diplôme : M2 MFA

Epreuve : Processus Stochastiques Discrets

Date : 25/1/23

Sujet de :

Groupe :

Nombre de copies utilisées : 1/2

Partie à rabattre

Nom :

Prénoms :

Né(e) le :

N° Étudiant

Correction

Note de 0 à 20	APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE

Ne pas écrire dans cette marge

Exercice 1 :

- $\mathbb{P}[S_n = 2n] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{n} (X_i - 2) = 0\right]$

$(X_i-2)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. i.i.d. centrées à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de période maximale 1. Le théorème local limite donne

$$\mathbb{P}[S_n = 2n] \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} \quad \text{car } \sigma = \sqrt{2}.$$

- Par le TCL $\tilde{S}_n := \frac{S_n - 2n}{\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

d'où $\mathbb{P}[S_n \geq 2n] = \mathbb{P}[\tilde{S}_n \geq 0] \to \mathbb{P}[\sigma Z \geq 0] = \frac{1}{2}$

(avec Z Gaussienne centrée réduite)

Par théorème de Berry-Esseen

$$\left|\mathbb{P}[S_n \geq 2n] - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{0{,}5\ \mathbb{E}\left[|X_1 - \mathbb{E}(X_1)|^3\right]}{\sigma^3\sqrt{n}} = \frac{0{,}5 \cdot 7}{2^{3/2}\sqrt{n}}$$

$$\simeq 1{,}25\, n^{-1/2}$$

- de même $\mathbb{P}[S_n = \lfloor 2n + \sqrt{n} \rfloor] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{thm limite} \\ \text{local}}}{\sim} \frac{e^{-1/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi n}} = \frac{e^{-1/4}}{2\sqrt{\pi n}}$

et $\mathbb{P}\left[S_n \geq \lfloor 2n+\sqrt{n} \rfloor\right] \xrightarrow{TCL} \mathbb{P}\left[\sigma Z \geq 1\right]$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_1^{+\infty} e^{-u^2/4}\, du$$

La vitesse de cv est identique à celle ci-dessus car borne de Berry-Esseen est uniforme en x.

- Pour $\mathbb{P}[S_n = 3n] \leq \mathbb{P}[S_n \geq 3n]$ on utilise l'inégalité de Chernoff.

$$\mathbb{E}\left[e^{\theta S_n}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta X_1}\right]^n = \left(\sum_{k\geq 1} e^{\theta k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n = \left(\frac{\frac{1}{2}e^{\theta}}{1-\frac{1}{2}e^{\theta}}\right)^n$$

$$\mathbb{P}\left[S_n = 3n\right] \leq \mathbb{P}\left[S_n \geq 3n\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{\theta S_n}\right]}{e^{3\theta n}} = \left(\frac{e^{\theta}}{(2-e^{\theta})\, e^{3\theta}}\right)^n$$

On prend (par exemple) $\theta = \log\left(\frac{3}{2}\right)$, on obtient

$$\mathbb{P}\left[S_n = 3n\right] \leq \mathbb{P}\left[S_n \geq 3n\right] \leq \left(\frac{3/2}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

Exercice 2.

1. Soit $A_j = \{ j \notin C_N \} = \{ \forall i \leq N,\ X_i \neq j \}$

$$\mathbb{P}(A_j) = \prod_{i=1}^{N} \mathbb{P}(X_i \neq j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N$$

Or $M_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}[A_j]$ d'où $\mathbb{E}[M_n] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}[A_j] = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N$.

Pour $N \sim (1+\varepsilon)\, n \log(n)$, on a

$$\mathbb{E}[M_n] = \exp\left(\log(n) + N \log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\log(n) - \frac{N}{n} + O\left(\frac{N}{n^2}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\log(n) - (1+\varepsilon)\log(n) + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right)$$

$$\mathbb{E}[M_n] = n^{-\varepsilon}\left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) \longrightarrow 0$$

Par méthode du 1er moment $\mathbb{P}[M_n = 0] \longrightarrow 1$

i.e. $C_N = \{1; \dots; n\}$ avec proba tendant vers 1.

2. $$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{1 \le j, k \le n} \underbrace{\mathbb{P}[A_j \wedge A_k]}_{= \begin{cases} (1-\frac{1}{n})^N & \text{si } j=k \\ (1-\frac{2}{n})^N & \text{si } j \ne k \end{cases}}$$

$$= \underbrace{n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N}_{\text{termes pr } j=k} + \underbrace{n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^N}_{\text{termes pour } j \ne k}$$

Or $n\left(1-\frac{1}{n}\right)^N = n^{\delta}\left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right)$ (voir ci-dessus)

de même, $n(n-1)\left(1-\frac{2}{n}\right)^N = n^{2\delta}\left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right)$

On obtient $\mathrm{Var}[M_n] = \mathbb{E}[M_n^2] - \mathbb{E}[M_n]^2 = n^{\delta} + O\left(\frac{\log(n)}{n^{1-2\delta}}\right)$
$$\ll \mathbb{E}[M_n]^2$$

Par méthode du second moment $\mathbb{P}[M_n = 0] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

i.e. $C_N \ne \{1; \dots; n\}$ avec proba tendant vers 1.

3. On regarde les moments factoriels

$$\mathbb{E}[(M_n)_r] = \sum_{\substack{1 \le j_1, \dots, j_r \le n \\ \text{distinct}}} \mathbb{P}[A_{j_1} \wedge \dots \wedge A_{j_r}]$$

$$= \binom{n}{r}\left(1 - \frac{r}{n}\right)^N$$

$$= n^r\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot \exp\left(\left(n\log(n) + \alpha n + O(1)\right) \cdot \left(\frac{-r}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp(-\alpha r)\left(1 + O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)\right) = \mathbb{E}[(P)_r]$$

où $P \sim \mathrm{Poisson}(e^{-\alpha})$

donc (méthode des moments) $M_n \xrightarrow{\text{loi}} P$.

et en particulier $\mathbb{P}[M_n = 0] = \mathbb{P}[C_N = \{1; \dots; n\}]$

$$\longrightarrow \mathbb{P}[P=0] = e^{-e^{-\alpha}}.$$

Exercice 3:

Soit $\varepsilon > 0$. Comme F_n est tendue,

$\exists$ compact $K \subseteq \mathcal{C}$: $\forall n \ \mathbb{P}(F_n \in K) \geq 1-\varepsilon$

Par Arzela-Ascoli, $\sup_{f \in K} \omega(f, \delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$

Soit $\eta > 0$. On prend $\delta_0 : \delta \leq \delta_0 \Rightarrow \sup_{f \in K} \omega(f, \delta_0) < \eta$

Alors $\mathbb{P}(\omega(F_n, \delta) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(F_n \notin K) \leq \varepsilon$.

pour tout n, $\delta \leq \delta_0$

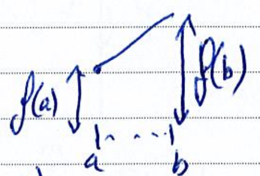
On a montré $\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(\omega(F_n, \delta) \geq \eta) \longrightarrow 0$

(en effet $\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver δ_0 tq ....)

Exercice 4:

1. Si f est affine sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{(b-a)}{2}(f(b)+f(a))$

(aire d'un trapèze)



Donc $\int_{i/n}^{i+1/n} W_n(t)\,dt = \frac{1}{2n}\left(W_n\left(\frac{i}{n}\right) + W_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2n^{3/2}}(S_i + S_{i+1})$

En sommant sur $i \in \{0; \dots; n-1\}$, on obtient

$$\int_0^1 W_n(t)\,dt = \frac{1}{2n^{3/2}}(S_0 + 2S_1 + \dots + 2S_{n-1} + S_n)$$

UNIVERSITÉ DE LORRAINE | FST FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES Nancy

Diplôme : M2 MFA

Epreuve : Processus Stochastiques Discrets

Date : 25/1/23

Sujet de :

Groupe :

Nombre de copies utilisées : 2/2

Partie à rabattre

Nom : Correction

Prénoms :

Né(e) le :

N° Étudiant

	Note de 0 à 20	APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE

Ne pas écrire dans cette marge

2. Par thm de Donsker $W_n(t) \to \sigma B$ dans $\mathcal{C}$

Or la fonctionnelle $\begin{array}{l} \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt \end{array}$ est continue

donc $\int_0^1 W_n(t)\,dt \longrightarrow \sigma \int_0^1 B(t)\,dt$

D'où $\frac{1}{\sigma n^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{\sigma} \int W_n(t)\,dt + \underbrace{\frac{S_n}{2\sigma n^{3/2}}}_{\xrightarrow{\text{loi}} 0} - \underbrace{\cancel{\frac{S_0}{2\sigma n^{3/2}}}}_{=0 \text{ p.s.}} \longrightarrow \int_0^1 B(t)\,dt.$

car $\frac{S_n}{n^{1/2}} \to \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

v.a. dont la loi est indépendante de X_1.

3. Pour montrer la cv des moments, il faut montrer $\forall s > 1$, $\mathbb{E}\left[\left|n^{-3/2}\sigma^{-1}\sum_k S_k\right|^s\right]$ est bornée.

$$\left|n^{-3/2}\sigma^{-1}\sum_k S_k\right|^s \leq \sigma^{-s}\left(\frac{\max_k |S_k|}{n^{1/2}}\right)^s$$

Donc $\mathbb{E}\left[\left|n^{-3/2}\sigma^{-1}\sum_k S_k\right|^s\right] \underset{\text{Doob}}{\leq} \left(\frac{s}{s-1}\right)^s \sigma^{-s}\, \mathbb{E}\left[\left|\frac{S_n}{n^{1/2}}\right|^s\right]$

Or les moments de $\frac{S_n}{n^{1/2}}$ convergent (voir preuve du TCL par la méthode des moments) et sont donc bornés.

On en déduit que les moments de $n^{-3/2} \sigma^{-1} \sum_{k=0}^{n} S_k$ sont bornés, ce qui implique la convergence des moments.