Processus stochastiques discrets, M2 MFA

Corrigé de l'examen du 15 janvier

Exercice 1 :

- $\mathbb{P}[S_n = 5n/4] \leqslant \mathbb{P}[S_n \leqslant 5n/4] = \mathbb{P}[e^{\theta S_n} \geqslant e^{5\theta n/4}]$ pour $\theta<0$

zone des grandes déviations

$\leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{\theta S_n})}{e^{5\theta n/4}}$ Markov

or $\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{2\theta}\right)\right)^n$

donc on obtient $\mathbb{P}[S_n = n/2] \leq e^{n\left(\Lambda(\theta) - \frac{5\theta}{4}\right)}$

avec $\Lambda(\theta) = \log\left(\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{2\theta})\right)$

On cherche θ^* qui minimise le membre de droite

solution de $\Lambda'(\theta^*) = \frac{5}{4} \iff \dfrac{e^{\theta^*} + 2e^{2\theta^*}}{e^{\theta^*} + e^{2\theta^*}} = \dfrac{5}{4}$.

En simplifiant on obtient $\frac{3}{4} e^{2\theta^*} = \frac{1}{4} e^{\theta^*}$

puis $\theta^* = -\log 3$.

$$\Lambda(\theta^*) = \log\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\right) = \log\left(\frac{4}{18}\right)$$

donc $\mathbb{P}[S_n = 5n/4] \leq e^{n\left(\log\left(\frac{4}{18}\right) + \frac{5}{4}\log 3\right)}$

- $\mathbb{P}\left[S_n \geqslant \frac{5n}{4}\right] \geqslant 1 - \mathbb{P}\left[S_n \leqslant \frac{5n}{4}\right] \geqslant 1 - e^{n\left(\log\left(\frac{4}{18}\right) + \frac{5}{4}\log 3\right)}$

d'après le point précédent

Donc $\mathbb{P}\left[S_n \geqslant \frac{5n}{4}\right]$ tend vers 1 à vitesse exponentielle.

- Pour $\mathbb{P}(S_n = \frac{3}{2}n + \sqrt{n})$, on utilise le théorème local limite

pour $T_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - \frac{3}{2}) = S_n - \frac{3}{2}n$ (car $\frac{3}{2} = \mathbb{E}(X_1)$)

$$\mathbb{P}\left(S_n = \frac{3}{2}n + \sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(T_n = \sqrt{n}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TLL}}}{=} \frac{n_\sigma(1)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$n_\sigma(1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\right) \quad \text{où} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{4}.$$

donc $n_\sigma(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp(-2)$

Conclusion $\mathbb{P}\left(S_n = \frac{3}{2}n + \sqrt{n}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\, e^{-2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

- Pour $\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{3}{2}n + \sqrt{n}\right)$, on utilise le théorème de Berry-Esseen pour $-T_n = -\left(S_n - \frac{3}{2}n\right)$

$$\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{3}{2}n + \sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(-T_n \leqslant -\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{-T_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant -\frac{1}{\sigma}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z \leqslant -2) + E \qquad \left(\text{car } \sigma = \tfrac{1}{2}\right)$$

avec $|E| \leqslant \frac{C\ell}{\sigma^3\sqrt{n}}$. On a $\ell = \mathbb{E}\left[\left|X_1 - \frac{3}{2}\right|^3\right] = \frac{1}{8}$

$\sigma^3 = \frac{1}{8}$; $C = \frac{1}{2}$ $\uparrow$ (cours)

donc $|E| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Conclusion: $\left|\mathbb{P}\left(S_n \geqslant \frac{3}{2}n + \sqrt{n}\right) - \int_{-\infty}^{-2} e^{-x^2/2}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$

Exercice 2:

1 Soit ℓ_n une suite d'entiers et X_n le nombre de facteurs décroissants de longueur ℓ_n dans $(U_1, \dots, U_n)$

Soit $A_i = \{U_i \leqslant U_{i+1} \leqslant \dots \leqslant U_{i+\ell_n-1}\}$

$X_n = \sum_{i=1}^{n-\ell_n+1} \mathbb{1}[A_i]$ et $\mathbb{P}[A_i] = \frac{1}{\ell_n!}$ $\forall i$ (l'ordre des $U_i, \dots, U_{i+\ell_n-1}$ est uniforme parmi les $\ell_n!$ ordres possibles)

Donc $\mathbb{E}[X_n] \sim \frac{n}{\ell_n!}$.

Si $\frac{n}{\ell_n!} \to 0$, on a $\mathbb{E}[X_n] \to 0$, et par la méthode du premier moment $\mathbb{P}[L_n < \ell_n] = \mathbb{P}[X_n = 0] \to 1$.

2. a. $\mathbb{E}[D_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}[U_i > U_{i+1}] = \frac{n-1}{2}$

$$\mathrm{Var}(D_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Var}(\mathbb{1}[U_i > U_{i+1}]) + 2\sum_{i=1}^{n-2} \mathrm{Cov}(\mathbb{1}[U_i > U_{i+1}], \mathbb{1}[U_{i+1} > U_{i+2}])$$

(autres cov sont nulles car évènements sont indépendants)

$\forall i \quad \mathrm{Var}(\mathbb{1}[U_i > U_{i+1}]) = \frac{1}{4}$

et $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}[U_i > U_{i+1}], \mathbb{1}[U_{i+1} > U_{i+2}]) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12} < 0$

donc $\mathrm{Var}(D_n) \leq \frac{n-1}{4} = o(\mathbb{E}(D_n)^2)$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebishev, on a

$$\frac{D_n}{\mathbb{E}(D_n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1.$$

b. $\mathbb{P}\left(D_n \geqslant \frac{3(n-1)}{4}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|D_n - \frac{n-1}{2}\right| \geqslant \frac{n-1}{4}\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(D_n)}{\left(\frac{n-1}{4}\right)^2} \leq \frac{4}{n-1}$.

c. ~~On a~~ $\cancel{D_n - \mathbb{E}[D_n] = \sum_{i=1}^{n-1} (Y_i - \frac{1}{2})}$ ~~où~~ $\cancel{Y_i = \mathbb{1}[U_i > U_{i+1}]}$

$\cancel{\mathbb{E}((D_n - \mathbb{E}(D_n))^4) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E}((Y_i - \frac{1}{2})^4) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}}$

3. a. Conditionnellement à $U_{k-1} = x$, $V_k = f_x(U_k)$

où $f_x(u) = \{u - x\}$

On note que f_x est une bijection de $[0;1]$ dans $[0;1]$ avec $f_x'(t) = 1$ pour presque tout t

On a, conditionnellement à $U_{k-1} = x$, pour toute fonction test h,

$$\mathbb{E}[h(V_k)] = \int_0^1 h(f_x(u))\,du = \int_0^1 h(f_x(u))\,du \cdot f_x'(u) = \int_0^1 h(v)\,dv$$

car $f_x'(u) \equiv 1$ ps. on pose $v = f_x(u)$, $dv = f_x'(u)\,du$ $\Rightarrow V_k$ est uniforme

Comme c'est vrai $\forall x \in [0,1]$, V_k est uniforme et indépendant de U_{k-1}.

Or par construction V_k est indépendant de $(U_1, \dots, U_{k-2})$

Donc V_k est indépendant de $(V_1, \dots, V_{k-1})$.

C'est vrai quelque soit $k \leq n$.

$\Rightarrow (V_1, \dots, V_n)$ est i.i.d. uniforme dans $[0;1]$.

b. $\{S_k\} = \{V_1 + \dots + V_k\} = \{U_1 + (U_2 - U_1) + \dots + (U_k - U_{k-1})\}$

$= \{U_k\} = U_k$ p.s. car $U_k \in [0;1[$ p.s.

Par ailleurs $S_k \leq S_{k+1} \leq S_k + 1$ p.s.

donc $\begin{cases} \lfloor S_k \rfloor = \lfloor S_{k+1} \rfloor \text{ et } \{S_k\} < \{S_{k+1}\} \\ \text{ou} \\ \lfloor S_{k+1} \rfloor = \lfloor S_k \rfloor + 1 \text{ et } \{S_k\} > \{S_{k+1}\}. \end{cases}$

La première partie de l'énoncé est prouvée.

Comme $\lfloor S_1 \rfloor = \lfloor U_1 \rfloor = 0$ p.s., on a

$$\lfloor S_n \rfloor = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\lfloor S_{k+1} \rfloor - \lfloor S_k \rfloor \right) \underset{\substack{\text{d'après} \\ \text{la } 1^{\text{ère}} \text{ partie}}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}[U_{k+1} < U_k] = D_n$$

c. $\mathbb{P}\left(D_n \geq \frac{3n}{4}\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{\theta S_n})}{e^{\frac{3\theta n}{4}}}$

or $\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = \mathbb{E}(e^{\theta V_1})^n = \left(\int_0^1 e^{\theta v} dv\right)^n = \left(\frac{1}{\theta}(e^\theta - 1)\right)^n$

On a $\mathbb{P}\left(D_n \geq \frac{3n}{4}\right) \leq \left(\dfrac{\frac{1}{\theta}(e^\theta - 1)}{e^{\frac{3\theta}{4}}}\right)^n \underset{\substack{\text{pour} \\ \theta = 1}}{=} \left(\dfrac{e-1}{e^{3/4}}\right)^n$

Exercice 3 :

1. Si $Y \in \mathbb{Z}$ p.s. alors $e^{2i\pi k Y} = 1$ p.s. pour tout $k \in \mathbb{Z}$

i.e. $\varphi_Y(2\pi k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Comme par ailleurs $|\varphi_Y(t)| \leq 1$ (vrai pour toute v.a. Y)

on a $\limsup_{t \to +\infty} |\varphi_Y(t)| = 1$

Par contre si Y a une densité f continue

$\varphi_Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} dx \longrightarrow 0$ quand $t \to +\infty$

(thm de Riemann-Lebesgue)

i.e. $\limsup_{t \to +\infty} |\varphi_Y(t)| = 0$

2. Pour q donné il y a 2^{q-1} entier p impairs entre 1 et $2^q - 1$

Donc $\displaystyle\sum_{\substack{p \text{ impair} \\ 1 \leq p \leq 2^q - 1}} \mathbb{P}\left(X = \frac{p}{2^q}\right) = \frac{2^{q-1}}{2^{2q-1}} = \frac{1}{2^q}$

et $\displaystyle\sum_{x \in D \cap]0;1[} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{q \geq 1} \left(\sum_{\substack{p \text{ impair} \\ 1 \leq p \leq 2^q - 1}} \mathbb{P}\left(X = \frac{p}{2^q}\right)\right)$

$\displaystyle = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{2^q} = 1$

3. On sait que pour $t \neq 0$, $|\varphi_X(t)| = 1$ si et seulement

si $X \in b + \frac{2\pi}{t}\mathbb{Z}$ p.s. $(*)$

Or l'ens. des valeurs de X est dense dans $[0;1]$

donc $(*)$ n'est vérifiée pour aucun $t \neq 0$

Conclusion $|\varphi_X(t)| < 1 \quad \forall t \neq 0$.

4. $\varphi_X(2^{q+1}\pi) = \mathbb{E}\left(e^{2\pi i \cdot (2^q X)}\right)$

or $2^q X \in \mathbb{Z}$ avec proba $\displaystyle\sum_{q' \leq q} \left(\sum_{\substack{p \text{ impair}, \\ 1 \leq p \leq 2^{q'} - 1}} \mathbb{P}\left(X = \frac{p}{2^{q'}}\right)\right) = \sum_{q' \leq q} \frac{1}{2^{q'}}$

$\displaystyle = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{q+1}}\right)$

$= 1 - 2^{-q}$.

$$\varphi_X(2^{q+1}\pi) = \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{2\pi i (2^q X)} \mathbb{1}_{2^q X\in\mathbb{Z}}\right)}_{\geqslant 1-2^{-q}} + \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{2\pi i(2^qX)}\mathbb{1}_{2^qX\notin\mathbb{Z}}\right)}_{|\cdot| \leq \mathbb{P}(2^qX\notin\mathbb{Z}) \leq 2^{-q}}$$

Conclusion $\left|\varphi_X(2^{q+1}\pi) - 1\right| \leq 2\cdot 2^{-q} = 2^{-q+1}$.

Cela implique $\limsup_{t\to+\infty} |\varphi_X(t)| = 1$ (rappel $|\varphi_X(t)|$ est tjrs ≤ 1)

Exercice 4

1. Soit $f\in E$, $f_n \in \mathcal{C}$ et $f_n\to f$.

Soit $\varepsilon>0$, $m := f(\varphi(f)) = \min_{x\in[0;1]} f(x)$

et $m' := \min_{x\in[0,1]\setminus[\varphi(f)-\varepsilon;\varphi(f)+\varepsilon]} f(x)$

Comme $f\in E$, $m' > m$.

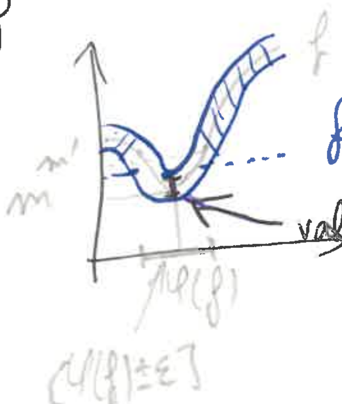
Pour n assez grand $\|f_n - f\| < \frac{m'-m}{2}$

Cela implique $f_n(\varphi(f)) < m + \left(\frac{m'-m}{2}\right) = \frac{m'+m}{2}$

$\forall x\notin[\varphi(f)-\varepsilon;\varphi(f)+\varepsilon]$ $f_n(x) > m' - \left(\frac{m'-m}{2}\right) = \frac{m'+m}{2}$

$\to$ le minimum de f_n ne peut pas être atteint en dehors de $[\varphi(f)-\varepsilon;\varphi(f)+\varepsilon]$

Dessin explicatif



f_n est ds tube bleu pr $x\notin[\varphi(f)\pm\varepsilon]$, $f_n(x)\geqslant\frac{m'+m}{2}$

valeurs possible de $f_n(\varphi(f))$

(on a $f_n(\varphi(f)) < \frac{m+m'}{2}$)

Conclusion : $|\varphi(f_n) - \varphi(f)| \leq \varepsilon$.

et φ est continue en f.

Prenons par contre $f \equiv 0$ et $f_n(x) = \frac{-x}{n}$ pour $x \in [0;1]$

$f_n \longrightarrow f$ dans $\mathcal{C}$

mais $\lim_{n \to +\infty} \varphi(f_n) = 1 \neq \varphi(f) = 0$

φ n'est pas continue ~~sur~~ $\mathcal{C}$.

2. On definit $W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}$ si nt entier et prolongée de manière affine entre ces points.

On a $K_n = n \cdot \varphi(W_n)$

Thm de Donsker $W_n \to \sigma \cdot B$ en loi dans $\mathcal{C}$.

Comme $B \in E$ p.s., $\sigma B \in E$ p.s.

et comme φ est continue en tout f de E,

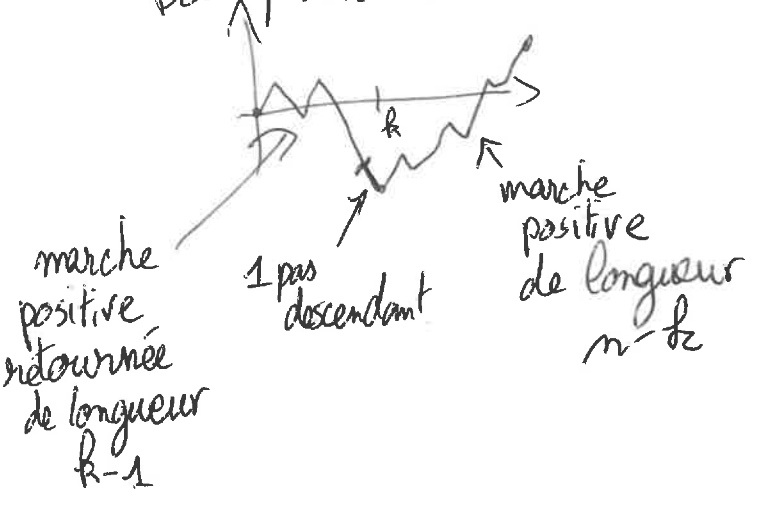
on a $\varphi(W_n) \xrightarrow{loi} \varphi(\sigma \cdot B) = \varphi(B)$

Donc $\frac{K_n}{n} \xrightarrow{loi} \varphi(B)$

Notons que la limite est indépendante de la loi de X_1!

3. $\mathbb{P}(K_n = k) = \dfrac{\#\{(x_1, \dots, x_n) : \text{marche associée atteint son minimum en } k\}}{2^n}$

Décomposition de ces marches



$= \dfrac{A_{k-1} \cdot A_{n-k}}{2^n}$

4. $$A_{k-1} = \frac{(k-1)!}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!^2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stirling}}}{\approx} \frac{(k-1)^{k-1}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)^{k-1}} \frac{\sqrt{2\pi k}}{\pi k} = 2^{k-1}\sqrt{\frac{2}{\pi k}}$$

De même, $$A_{n-k} = 2^{n-k}\sqrt{\frac{2}{\pi(n-k)}}$$

D'où $$\mathbb{P}[K_n = k] \sim \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{k(n-k)}} \sim \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$$

C'est un théorème local limite pour K_n.

Cela implique que $\frac{K_n}{n} \xrightarrow{\text{loi}}$ Beta où Beta a densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $[0,1]$

Note: $\frac{K_n}{n} \to$ Beta est vraie pour toute marche aléatoire car on a montré en 2. que la limite ne dépend pas de ~~la~~ loi de X_1 !