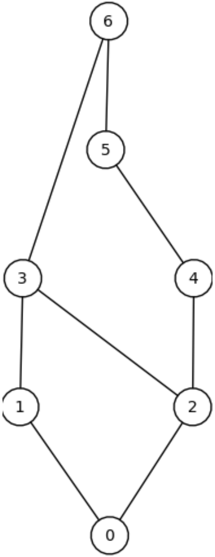
Interprétation algébrique d'une identité combinatoire due à Greene

Valentin Féray (LaBRI)
travail avec Adrien Boussicault et Victor Reiner

GT CÉA, 25 septembre 2009

Plan

1. Présentation de l'identité de Greene
2. Recodage en termes d'intégrale sur un cône du membre de gauche
   $\Rightarrow$ on retrouve les propriétés du 1.
3. Remarques de conclusion...



extensions linéaires :

$$
\begin{aligned}
&[[0,1,2,3,4,5,6],\\
&[0,1,2,4,3,5,6],\\
&[0,1,2,4,5,3,6],\\
&[0,2,1,3,4,5,6],\\
&[0,2,1,4,3,5,6],\\
&[0,2,1,4,5,3,6],\\
&[0,2,4,1,3,5,6],\\
&[0,2,4,1,5,3,6],\\
&[0,2,4,5,1,3,6]]
\end{aligned}
$$

fait avec Sage !

La fonction considérée par Greene

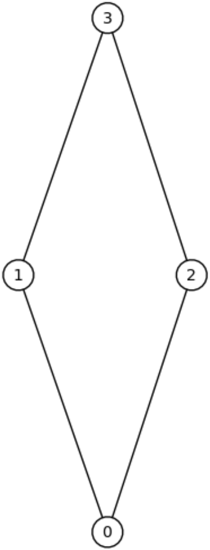
Pour un mot (par exemple $w = [0, 2, 1, 4, 3, 5, 6]$), posons :

$$\Psi_w := \frac{1}{(x_0 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 - x_4) \dots (x_5 - x_6)}$$

Pour un poset :

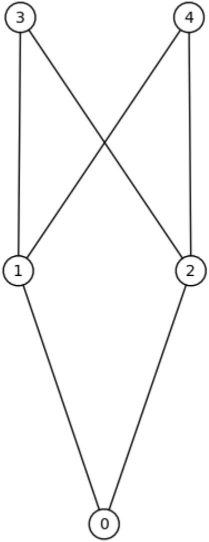
$$\Psi_P := \sum_{\substack{w \text{ extension} \\ \text{linéaire de } P}} \Psi_w$$

Exemple



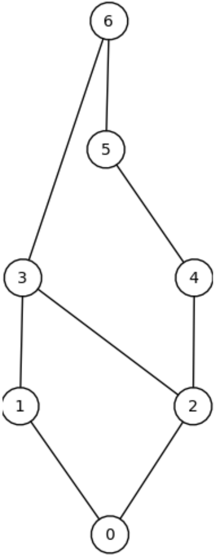
$$\begin{aligned}\Psi_P &= \frac{1}{(x_0-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \\ &\quad + \frac{1}{(x_0-x_2)(x_2-x_1)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{x_0x_1+x_2x_3-x_0x_2-x_1x_3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_2)\cdot (x_1-x_3)(x_2-x_3)} \\ &= \frac{x_0-x_3}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)}\end{aligned}$$

Exemple 2



$$\Psi_P = \frac{x_0x_1 + x_0x_2 - x_1x_2 - x_0x_3 - x_0x_4 + x_3x_4}{(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)\cdot (x_1 - x_3)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

Exemple 3



$$\Psi_P = \frac{(x_2 - x_6)(x_0 - x_3)}{(x_5 - x_6)(x_4 - x_5)(x_3 - x_6)(x_2 - x_4)\cdot (x_2 - x_3)(x_1 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}$$

Résultats connus

P non connexe $\Rightarrow \Psi_P = 0$. Sinon,

le dénominateur de Ψ_P (sous forme irréductible) est :

$$\mathrm{Den}(\Psi_P) = \prod_{(i,j) \text{ arête de } \mathcal{H}(P)} x_i - x_j$$

$\Rightarrow$ numérateur de degré c =nombre cyclomatique.

Théorème de Greene (1992)

Si P *fortement planaire*,

$$\Psi_P = \frac{\displaystyle\prod_{\rho \text{ régions bornées}} x_{\min(\rho)} - x_{\max(\rho)}}{\displaystyle\prod_{(i,j) \text{ arête de } \mathcal{H}(P)} x_i - x_j}$$

Ψ_w est une intégrale *simple* !

En effet, pour $z_1, \dots, z_n > 0$

$$\frac{1}{z_1 \dots z_{n-1}} = \int_{\mathbb{R}^+_{n-1}} \exp(-\langle u, z \rangle) du$$

Soit $V = \{x_1 + \cdots + x_n = 0\} \subset \mathbb{R}_n$, par changement de variable

$$\frac{1}{(x_{w_1} - x_{w_2}) \dots (x_{w_{n-1}} - x_{w_n})} = \int_{K_w} \exp(-\langle u, x \rangle) d\mu_V(u),$$

où $K_w = \mathbb{R}^+[e_{w_1} - e_{w_2}, e_{w_2} - e_{w_3}, \dots, e_{w_{n-1}} - e_{w_n}] \subset V$.

Généralisation à K_P

Proposition

Soit P un poset quelconque :

$$\Psi_P = \int_{K_P} \exp(-\langle u, z \rangle) du$$

où $K_P = \mathbb{R}^+[e_i - e_j]_{i <_P j} \subset V$.

Idée de la preuve :

- Il suffit de montrer que $\forall i, j$ incomparables dans P,

$$\int_{K_P} \dots = \int_{K_{P_{i<j}}} \dots + \int_{K_{P_{i>j}}} \dots$$

- Cela provient du fait que :

$$\chi_{K_P} = \chi_{K_{P_{i<j}}} + \chi_{K_{P_{i>j}}} - \chi_{K_P + \mathbb{R}(e_i - e_j)}.$$

⚠ les ensembles de définitions ne sont pas les mêmes.

Proposition

Soit P un poset quelconque :

$$\Psi_P = \int_{K_P} \exp(-\langle u, z \rangle) du$$

où $K_P = \mathbb{R}^+[e_i - e_j]_{i <_P j} \subset V$.

Remarque :
$\left\{ e_i - e_j, (i,j) \text{ arête de } \mathcal{H}(P) \right\}$ est un ensemble minimal de générateurs de P.

Conséquence :
P non connexe $\Rightarrow$ $\dim(K_P) < \dim(V)$ $\Rightarrow \Psi_P = 0$.
En découpant le cone, on retrouve la formule de $\mathrm{Den}(\Psi_P)$.

Somme associée

intégrale = objet difficile à manipuler
Considérons la somme :

$$H(K_P; x) = \sum_{u \in K_P \cap \mathbb{Z}^n} \exp(-\langle u, x \rangle)$$

Proposition

$$H(K_P, x) = \frac{h_c(K, x) + h_{c+1}(K, x) + \dots}{\mathrm{Den}(\Psi_P)},$$

où h_i est un polynôme de degré i. De plus,

$$\Psi_P = (-1)^{|P|-1} \frac{h_c(K, x)}{\mathrm{Den}(\Psi_P)}.$$

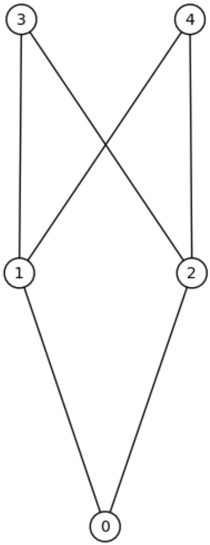
Série de Hilbert multigraduée

Posons $X_i = \exp(-\langle x, e_i \rangle)$.

$$H(K_P; x) = \sum_{u = \sum u_i e_i \in K_P \cap \mathbb{Z}^n} \prod_i X_i^{u_i}.$$

C'est la série génératrice ($\deg(u) = (u_1, \dots, u_n)$) du *semi-groupe commutatif* $K_P \cap \mathbb{Z}^n$

- générateurs : $\left\{ U_{i,j} = e_i - e_j, (i,j) \text{ arête de } \mathcal{H}(P) \right\}$
- relations ?



- Considérons un circuit élémentaire C du graphe non orienté :

  exemple : $0 - -1 - -3 - -2 - -0$

- On a la relation suivante :

$$\sum_{\substack{(i,j)\text{ arête}\\ \text{montante dans } C}} U_{i,j} = \sum_{\substack{(i,j)\text{ arête}\\ \text{descendante dans } C}} U_{i,j}$$

  Dans notre cas :

$$U_{0,1} + U_{1,3} = U_{0,2} + U_{2,3}$$

- Toutes les relations se déduisent de celles-ci.

Cas très simple

pas de circuits $\Rightarrow$ pas de relations.

Rappel : un générateur $U_{i,j}$ par arête de degré $e_i - e_j$.

$$H(K_P, x) = \prod_{(i,j)\text{ arête}} \frac{1}{1 - X_i X_j^{-1}}$$

$$\Psi_P = \prod_{(i,j)\text{ arête}} \frac{1}{x_i - x_j}$$

Cas simple

1 seul circuit $\Rightarrow$ 1 relation $A = B$

$$\text{avec } \deg(A) = \sum_{i \in \min(C)} e_i - \sum_{j \in \max(C)} e_j$$

$$K_P \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^+\{U_{i,j}\}_{/A=B}$$

ou, en passant aux algèbres,

$$(A - B)k[U_{i,j}] \hookrightarrow k[U_{i,j}] \twoheadrightarrow k[K_P \cap \mathbb{Z}^n]$$

$$H(K_P, x) = \prod_{(i,j) \text{ arête}} \frac{1}{1 - X_i X_j^{-1}}$$

$$- \prod_{i \in \min(C)} X_i \cdot \prod_{j \in \max(C)} X_j^{-1} \cdot \left(\prod_{(i,j) \text{ arête}} \frac{1}{1 - X_i X_j^{-1}} \right)$$

Cas simple

1 seul circuit $\Rightarrow$ 1 relation $A = B$

$$\text{avec } \deg(A) = \sum_{i \in \min(C)} e_i - \sum_{j \in \max(C)} e_j$$

$$K_P \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^+\{U_{i,j}\}_{/A=B}$$

ou, en passant aux algèbres,

$$(A-B)k[U_{i,j}] \hookrightarrow k[U_{i,j}] \twoheadrightarrow k[K_P \cap \mathbb{Z}^n]$$

$$H(K_P, x) = \frac{1 - \prod_{i \in \min(C)} X_i \cdot \prod_{j \in \max(C)} X_j^{-1}}{\prod_{(i,j) \text{ arête}} 1 - X_i X_j^{-1}}$$

$$\Psi_P = \frac{\sum_{i \in \min(C)} x_i - \sum_{j \in \max(C)} x_j}{\prod_{(i,j) \text{ arête}} x_i - x_j}$$

Cas favorable

on peut calculer facilement $H(K_P, x)$ si on peut itérer le raisonnement précédent.

i.e. si on a des relations $R_1, \dots, R_\ell$ telles que :

$$R_i \text{ n'est pas un diviseur de 0 dans } k[U_{i,j}]_{/(R_1,\dots,R_{i-1})}$$

$\Leftrightarrow$ on peut réduire le nombre de relations à $c(\mathcal{H}(P))$

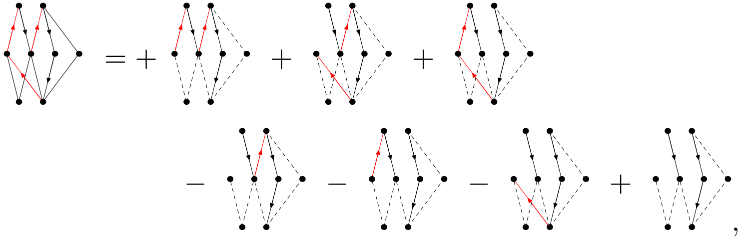
marche dans le cas fortement planaire

$$H(K_P, x) = \frac{\displaystyle\prod_{\rho \text{ régions bornées}} 1 - X_{\min(\rho)} X_{\max(\rho)}^{-1}}{\displaystyle\prod_{(i,j) \text{ arête}} 1 - X_i X_j^{-1}}$$

$\Rightarrow$ théorème de Greene

Une relation de récurrence

La relation suivante est utile pour étudier Ψ.



où on a omis Ψ pour plus de lisibilité.

Proposition

Cette relation reste vraie en remplaçant $\Psi_\bullet$ par $\chi_{K_\bullet}$.

Une autre fonction intéressante

Problème voisin :
Etudier $\varphi(P) = \sum_{\substack{w \text{ extension} \\ \text{linéaire de } P}} \frac{1}{x_{w_1}(x_{w_1}+x_{w_2})\dots(x_{w_1}+\dots+x_{w_n})}$.

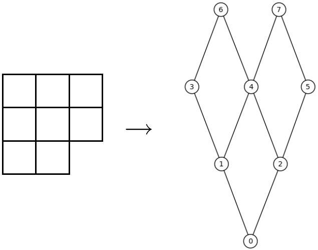
C'est la même intégrale que Ψ_P sur le cône

$$K'_P = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \text{ tq } \begin{array}{l} x_i \geq 0 \\ x_i \geq x_j \text{ si } i \leq_P j \end{array} \right\}$$

$\longrightarrow$ dénominateur facile

Formule des équerres colorée

Cas où P vient d'un diagramme de Young :



si $\forall i, x_i = 1$, $\varphi(P) = \frac{\text{nombre de tableaux standards}}{n!}$.

Si on identifie les variables correspondant aux cases de même content, $H(K'_P)$ est une somme connue. $\Rightarrow$ on retrouve une formule des équerres colorée (Nakada)