

Fonctions sur les diagrammes de Young : caractères du groupe symétrique et polynômes de Kerov

Valentin Féray
Sous la direction de Philippe Biane

École doctorale ICMS
Université Paris-Est

Soutenance de thèse
Champs-sur-Marne, 9 mars 2009

UNIVERSITÉ
— PARIS-EST



Contexte

- Représentations irréductibles de $S_n \simeq$ partitions $\lambda \vdash n$.
- Objectif : étude des valeurs des caractères irréductibles $\chi^\lambda(\pi)$ comme une fonction de λ (en fixant $\pi \in S_n$).

Contexte

- Représentations irréductibles de $S_n \simeq$ partitions $\lambda \vdash n$.
- Objectif : étude des valeurs des caractères irréductibles $\chi^\lambda(\pi)$ comme une fonction de λ (en fixant $\pi \in S_n$).
- Motivation générale : c'est un bon outil pour l'étude asymptotique des représentations des groupes symétriques
 - temps de mélange,
 - forme d'un diagramme aléatoire,
 - longueur de la plus longue sous-suite croissante d'un mot aléatoire.

Contexte

- Représentations irréductibles de $S_n \simeq$ partitions $\lambda \vdash n$.
- Objectif : étude des valeurs des caractères irréductibles $\chi^\lambda(\pi)$ comme une fonction de λ (en fixant $\pi \in S_n$).
- Outils utilisés dans cette thèse :
 - algèbres de fonctions sur l'ensemble \mathcal{Y} des diagrammes de Young : graduation, changement de bases, ...
 - description combinatoire des coefficients : en particulier à base de cartes.

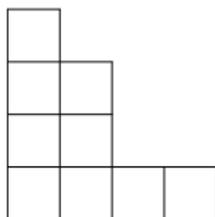
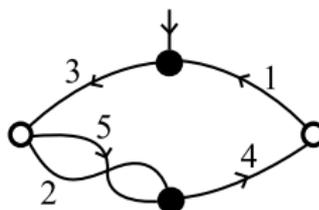
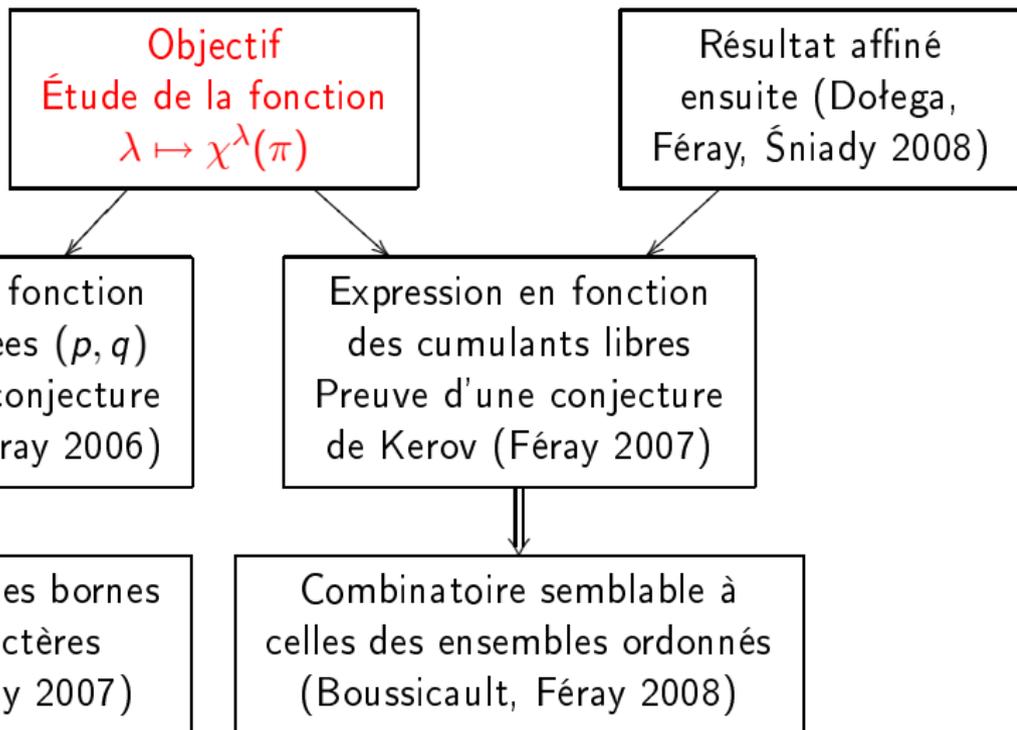


Diagramme de
Young



Carte bicolore enracinée
avec un cycle

Résultats obtenus



Plan de la présentation

- 1 Fonctions sur l'ensemble \mathcal{Y} des diagrammes de Young
 - Définitions et paramètres
 - Formule combinatoire pour les caractères
 - Degré et comportement asymptotique
- 2 Combinatoire autour des polynômes de Kerov
 - Cumulants libres et polynômes de Kerov
 - Une algèbre sur les graphes
 - Interprétation des coefficients
- 3 Synthèse des résultats et perspectives

Partitions et diagrammes de Young

Définition

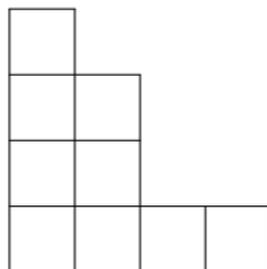
Une **partition** λ est une suite décroissante presque nulle d'entier

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = 0$$

$r = \ell(\lambda)$ est la longueur de la partition, $n = |\lambda| = \sum_i \lambda_i$ son poids.

Exemple : $\lambda = (4, 2, 2, 1, 0, \dots)$ avec $r = 4, n = 9$.

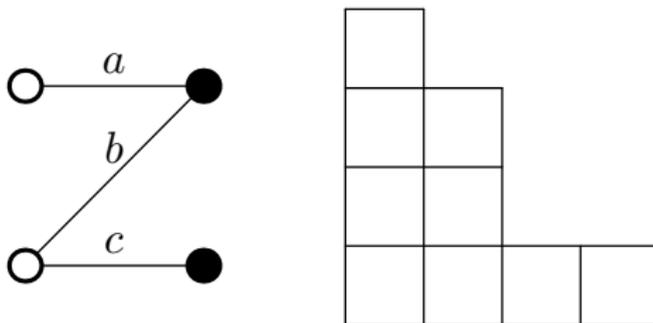
Une partition λ sera désormais identifiée à son **diagramme de Young** :



Exemples de fonction sur les partitions

On va définir une famille de fonctions indexée par les graphes bicolores.

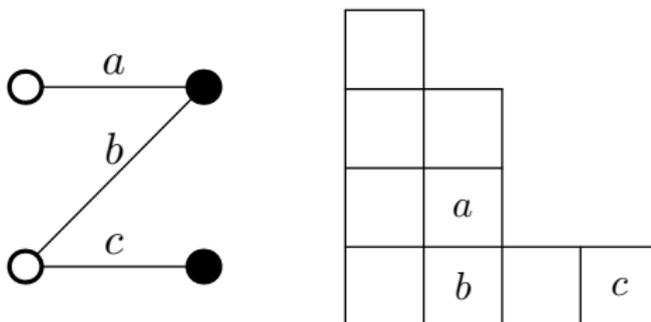
Soit G un graphe bicolore et λ une partition :



Exemples de fonction sur les partitions

On va définir une famille de fonctions indexée par les graphes bicolores.

Soit G un graphe bicolore et λ une partition :



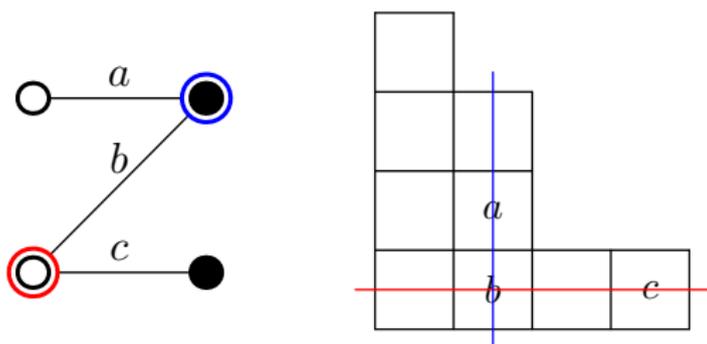
$N_G(\lambda)$ est le nombre de manières de :

- associer à chaque arête une case du diagramme

Exemples de fonction sur les partitions

On va définir une famille de fonctions indexée par les graphes bicolores.

Soit G un graphe bicolore et λ une partition :



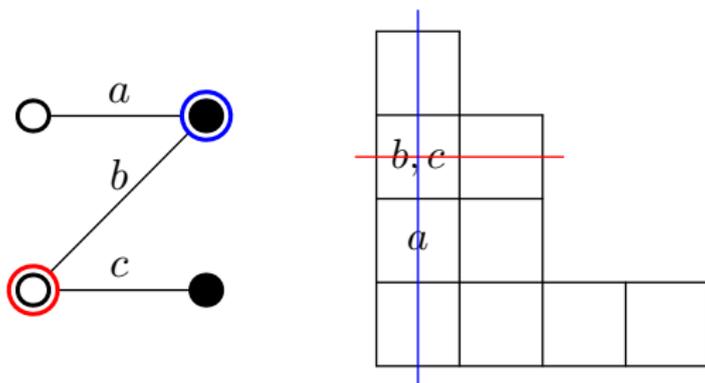
$N_G(\lambda)$ est le nombre de manières de :

- associer à chaque arête une case du diagramme
- les cases correspondant aux arêtes ayant la même extrémité **blanche** (resp. **noire**) sont dans la même **ligne** (resp. **colonne**)

Exemples de fonction sur les partitions

On va définir une famille de fonctions indexée par les graphes bicolores.

Soit G un graphe bicolore et λ une partition :

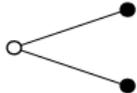


$N_G(\lambda)$ est le nombre de manières de :

- associer à chaque arête une case du diagramme
- les cases correspondant aux arêtes ayant la même extrémité **blanche** (resp. **noire**) sont dans la même **ligne** (resp. **colonne**)

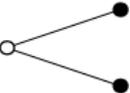
Comment écrire une fonction sur les diagrammes de Young ?

- Réponse naturelle : comme une fonction des λ_j . Par exemple,

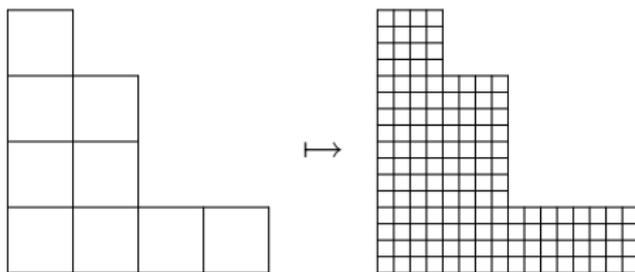
si $G =$  , on a $N_G(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2$.

Comment écrire une fonction sur les diagrammes de Young ?

- Réponse naturelle : comme une fonction des λ_j . Par exemple,

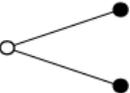
si $G =$ , on a $N_G(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2$.

- Défaut : difficile de voir l'effet d'une dilatation $\lambda \mapsto c \bullet \lambda$ (ici, $c = 4$)

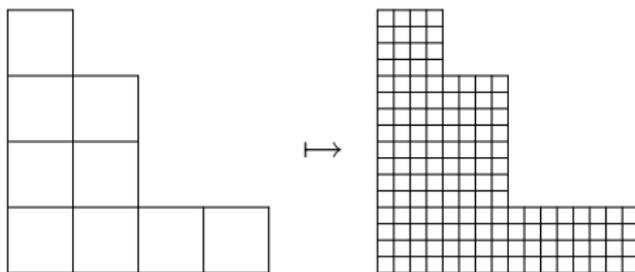


Comment écrire une fonction sur les diagrammes de Young ?

- Réponse naturelle : comme une fonction des λ_j . Par exemple,

si $G =$ , on a $N_G(\lambda) = \sum_i \lambda_i^2$.

- Défaut : difficile de voir l'effet d'une dilatation $\lambda \mapsto c \bullet \lambda$ (ici, $c = 4$)



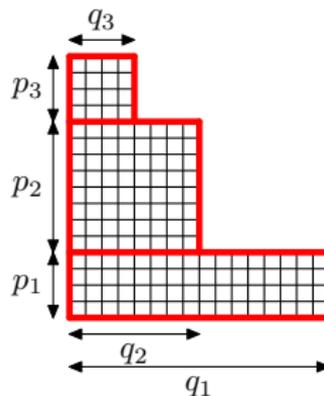
→ Nous allons introduire d'autres paramètres.

Diagrammes multirectangulaires

Soient \mathbf{p} et \mathbf{q} deux suites presque-nulles d'entiers positifs (avec \mathbf{q} décroissante). On considère la partition :

$$\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \underbrace{q_1, \dots, q_1}_{p_1 \text{ fois}}, \underbrace{q_2, \dots, q_2}_{p_2 \text{ fois}}, \dots$$

Diagramme correspondant (dessiné pour $p_1 = p_3 = 4$, $p_2 = 8$, $q_1 = 16$, $q_2 = 8$, $q_3 = 4$) :



Utilisation des coordonnées (p, q)

fonction sur $\mathcal{Y} \mapsto$ fonction de (\mathbf{p}, \mathbf{q}) .

Par exemple,

$$N_G(\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \sum_{\varphi: V_0(G) \rightarrow \mathbb{N}^*} \prod_{b \in V_0} p_{\varphi(b)} \prod_{n \in V_0} q_{\psi(n)},$$

où $\psi(n) = \max_{b \text{ voisin de } n} \varphi(b)$.

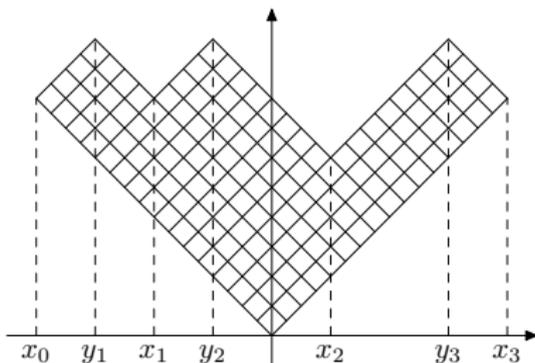
Si on considère les \mathbf{p} et les \mathbf{q} comme des variables formelles, N_G est une série entière homogène de degré $|V(G)|$ (nombre de sommets de G). Donc

$$N_G(c \bullet \lambda) = c^{|V(G)|} N_G(\lambda).$$

→ cela définit une notion de degré sur certaines fonctions sur \mathcal{Y} .

Coordonnées entrelacées de Kerov

Regardons le diagramme tourné de 45° (représentation russe).



Abscisse des coins intérieurs : $x_0 = -16, x_1 = -8, x_2 = 4, x_3 = 16$

Abscisse des coins saillants : $y_1 = -12, y_2 = -4, y_3 = 12$

Note : transformation linéaire (simple) entre (\mathbf{p}, \mathbf{q}) et (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Caractères irréductibles du groupe symétrique

Soit $\pi \in S_k$. On peut considérer la fonction suivante

$$\Phi_\pi : \left\{ \begin{array}{l} \text{diagrammes de Young} \\ \text{à } k \text{ cases} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\lambda \mapsto \chi^\lambda(\pi),$$

où χ^λ est le caractère de la représentation irréductible V_λ de S_k .

Pour avoir une fonction sur \mathcal{Y} , il faut utiliser le plongement naturel $i_{k,n} : S_k \hookrightarrow S_n$ pour $n \geq k$ (ajout de points fixes).

$$\tilde{\Phi}_\pi(\lambda) = \begin{cases} \Phi_{i_{k,n}(\pi)}(\lambda) & \text{si } n = |\lambda| \geq k; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Note : $\tilde{\Phi}_\pi$ ne dépend que du type μ de la partition π .

Une bonne renormalisation

Renormalisation de caractères : si $\mu \vdash k$, on pose

$$\Sigma_{\mu}(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-|\mu|+1) \frac{\chi^{\lambda}(i_{k,n}(\pi))}{\chi^{\lambda}(\text{Id}_n)} & \text{si } n = |\lambda| \geq k; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où π est une partition quelconque de type μ .

Une bonne renormalisation

Renormalisation de caractères : si $\mu \vdash k$, on pose

$$\Sigma_{\mu}(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-|\mu|+1) \frac{\chi^{\lambda}(i_{k,n}(\pi))}{\chi^{\lambda}(\text{Id}_n)} & \text{si } n = |\lambda| \geq k; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme

Soit μ_1 et μ_2 deux partitions. Alors, en tant que fonction sur \mathcal{Y} ,

$$\Sigma_{\mu_1} \cdot \Sigma_{\mu_2} = \sum_{\nu \text{ partition}} c_{\nu} \Sigma_{\nu}$$

En fait, $\langle \Sigma_{\nu} \rangle = \text{Sym}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Une bonne renormalisation

Renormalisation de caractères : si $\mu \vdash k$, on pose

$$\Sigma_{\mu}(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-|\mu|+1) \frac{\chi^{\lambda}(i_{k,n}(\pi))}{\chi^{\lambda}(\text{Id}_n)} & \text{si } n = |\lambda| \geq k; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme

Soit μ_1 et μ_2 deux partitions. Alors, en tant que fonction sur \mathcal{Y} ,

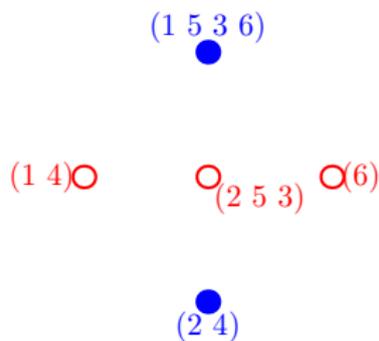
$$\Sigma_{\mu_1} \cdot \Sigma_{\mu_2} = \sum_{\nu \text{ partition}} c_{\nu} \Sigma_{\nu}$$

Problème

Exprimer Σ_{μ} en fonction de la forme du diagramme.

Graphe bicolore associé à deux permutations

Définition par l'exemple $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.

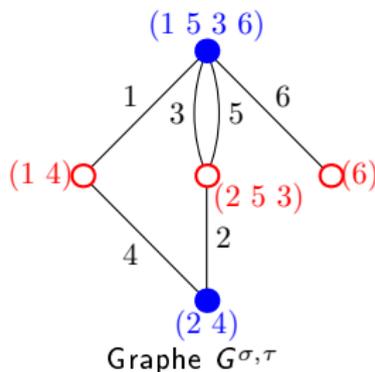


$$V_{\bullet} \simeq C(\sigma) \text{ (cycles de } \sigma \text{)}$$

$$V_{\circ} \simeq C(\tau) \text{ (cycles de } \tau \text{)}$$

Grphe bicolore associé à deux permutations

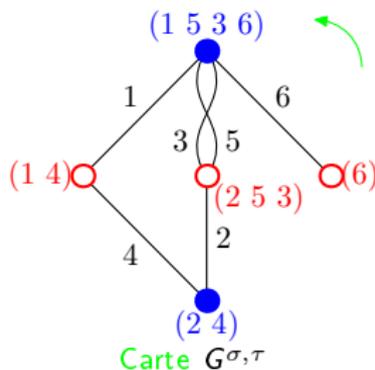
Définition par l'exemple $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.



$\{\text{arêtes entre } c_1 \in C(\sigma) \text{ et } c_2 \in C(\tau)\} \simeq c_1 \cap c_2$

Graphe bicolore associé à deux permutations

Définition par l'exemple $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.



Structure de carte naturelle.

On peut alors retrouver les permutations à partir de la carte et des étiquettes des arêtes.

Formule pour le caractère renormalisé

Théorème (Féray 2006, conjecturé par R. Stanley)

Soit $\mu \vdash k$. En tant que fonction sur \mathcal{Y} , on a :

$$\Sigma_{\mu} = \sum_{\substack{\tau, \sigma \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \pm N_{G^{\tau, \sigma}},$$

où π est une permutation quelconque de type μ dans S_k .

Formule pour le caractère renormalisé

Théorème (Féray 2006, conjecturé par R. Stanley)

Soit $\mu \vdash k$. En tant que fonction sur \mathcal{Y} , on a :

$$\Sigma_{\mu} = \sum_{\substack{\tau, \sigma \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \pm N_{G^{\tau, \sigma}},$$

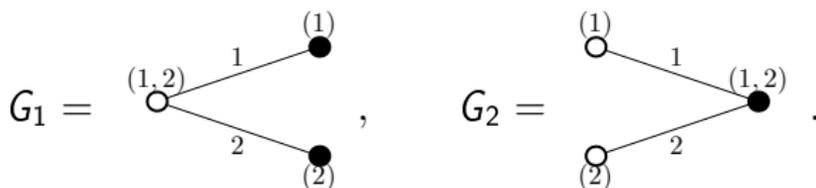
où π est une permutation quelconque de type μ dans S_k .

Σ_{μ} est une fonction non homogène de degré $|\mu| + \ell(\mu)$.

Exemple

Prenons $\mu = (2), \pi = (12)$. La somme a 2 termes correspondant à $(\tau, \sigma) = ((12), \text{Id}_2)$ et $(\tau, \sigma) = (\text{Id}_2, (12))$.

Voici les graphes correspondants :



et les fonctions associées :

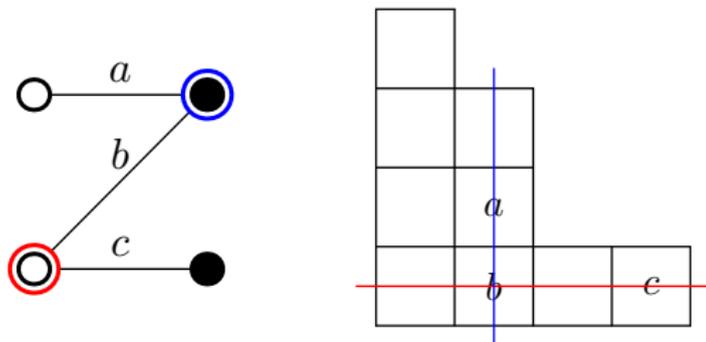
$$N_{G_1}(\lambda) = \sum_i (\lambda_i)^2, \quad N_{G_2}(\lambda) = \sum_i (\lambda'_i)^2.$$

On a alors :

$$\Sigma_2(\lambda) = \sum_i (\lambda_i)^2 - \sum_i (\lambda'_i)^2.$$

Borne supérieure pour les N_G

Rappel : $N_G(\lambda)$ est le nombre d'écritures de G dans λ .



{Ecritures} \leftrightarrow choix d'une ligne ou d'une colonne par sommet.
 Donc, si λ a moins de A lignes et A colonnes (on notera $\lambda \in \mathcal{Y}^A$),

$$N_G(\lambda) \leq A^{|V_G|} = A^{\deg(N_G)}$$

Et sur les caractères ?

Soit $F \in \langle N_G \rangle$. Alors,

$$\forall \lambda \in \mathcal{Y}^A, |F(\lambda)| \leq c_F A^{\deg(F)}.$$

Et sur les caractères ?

Soit $F \in \langle N_G \rangle$. Alors,

$$\forall \lambda \in \mathcal{Y}^A, |F(\lambda)| \leq c_F A^{\deg(F)}.$$

Si F est le caractère renormalisé Σ_μ , on obtient

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathcal{Y}^A, |\Sigma_\mu(\lambda)| &\leq c_\mu A^{|\mu|+\ell(\mu)} \\ \iff \left| \frac{\chi^\lambda(\mu \mathbf{1} \cdot)}{\chi^\lambda(\text{Id}_{|\lambda|})} \right| &\leq c_\mu \frac{A^{|\mu|+\ell(\mu)}}{|\lambda|^{|\mu|}} \end{aligned}$$

Et sur les caractères ?

Soit $F \in \langle N_G \rangle$. Alors,

$$\forall \lambda \in \mathcal{Y}^A, |F(\lambda)| \leq c_F A^{\deg(F)}.$$

Si F est le caractère renormalisé Σ_μ , on obtient

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathcal{Y}^A, |\Sigma_\mu(\lambda)| &\leq c_\mu A^{|\mu|+\ell(\mu)} \\ \iff \left| \frac{\chi^\lambda(\mu 1^\cdot)}{\chi^\lambda(\text{Id}_{|\lambda|})} \right| &\leq c_\mu \frac{A^{|\mu|+\ell(\mu)}}{|\lambda|^{|\mu|}} \end{aligned}$$

Si $A \leq D \cdot \sqrt{|\lambda|}$ (diagramme dit équilibré, cas le plus probable),

$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu 1^\cdot)}{\chi^\lambda(\text{Id}_{|\lambda|})} \right| \leq c'_{\mu,D} \left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}} \right)^{|\mu|-\ell(\mu)}$$

On retrouve un résultat de P. Biane (1998) qui donnait aussi le terme d'ordre $|\lambda|^{-1/2(|\mu|-\ell(\mu))}$. C'est optimal à une constante près.

Et si la taille de la permutation grandit (un peu) ?

- La borne sur les N_G peut être améliorée.
- On peut majorer le nombre de termes de chaque degré dans l'expression de Σ_μ en fonction des N_G .

Cela permet de prouver le résultat suivant :

Théorème (Féray, Śniady 2007)

$\exists a > 0$ tel que, $\forall A, \forall \lambda \in \mathcal{Y}^A$, on a :

$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu 1^\cdot)}{\dim \lambda} \right| \leq \left[a \max \left(\frac{A}{n}, \frac{|\mu|}{n} \right) \right]^{|\mu| - \ell(\mu)}, \quad (1)$$

où $n = |\lambda|$.

Et si la taille de la permutation grandit (un peu) ?

Théorème (Féray, Śniady 2007)

$\exists a > 0$ tel que, $\forall A, \forall \lambda \in \mathcal{Y}^A$, on a :

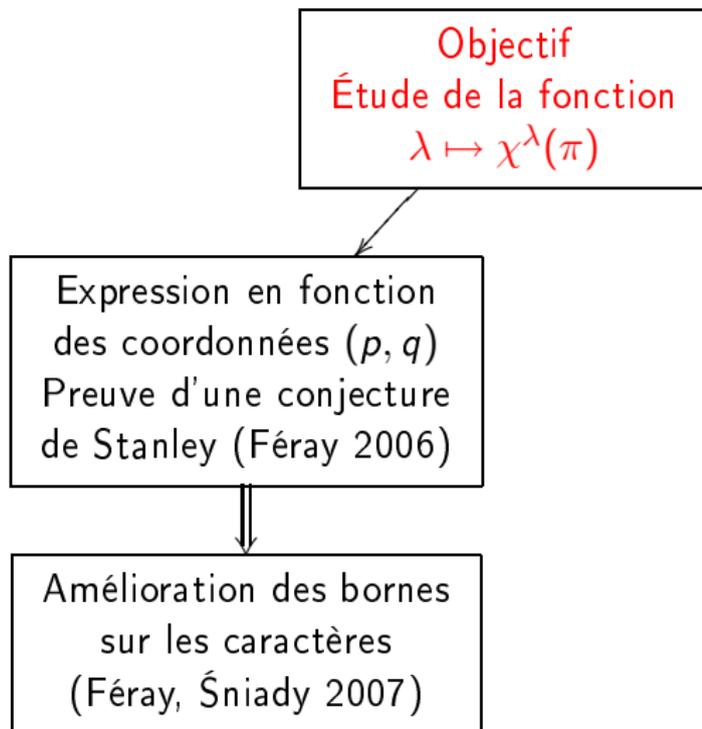
$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu 1^\cdot)}{\dim \lambda} \right| \leq \left[a \max \left(\frac{A}{n}, \frac{|\mu|}{n} \right) \right]^{|\mu| - \ell(\mu)}, \quad (1)$$

où $n = |\lambda|$.

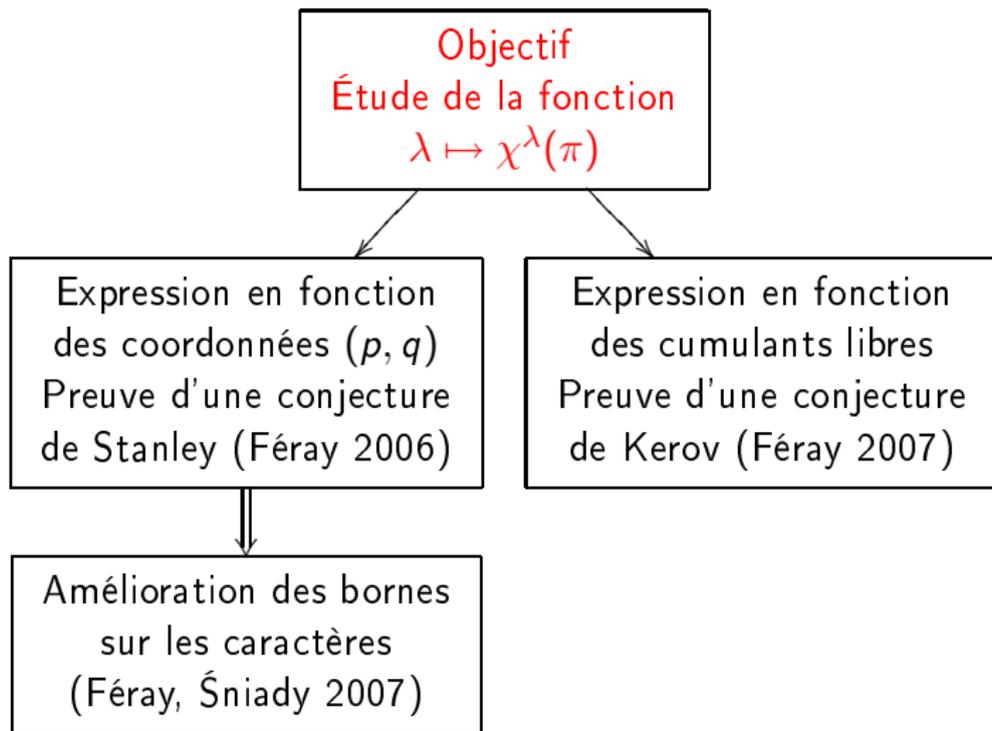
Commentaires :

- meilleure borne universelle connue pour l'instant pour $A, |\mu| = o(n)$.
- on a aussi obtenu des bornes sur les termes d'erreurs dans des équivalents classiques.

Transition



Transition



Les caractères en fonction des cumulants libres

Définition des cumulants libres

R_{k+1} est la composante homogène de degré $k + 1$ de Σ_k .

Note : ce n'est pas la définition originale, l'équivalence des deux ayant été prouvé par P. Biane (1998).

Existence des polynômes de Kerov (Kerov 2000)

Il existe un polynôme K_k à coefficients entiers, appelé *k-ième polynôme de Kerov* tel que, en tant que fonction sur \mathcal{Y} , on ait

$$\Sigma_k = K_k(R_2, \dots, R_{k+1})$$

Polynômes de Kerov

Exemples

$$\Sigma_1 = R_2;$$

$$\Sigma_4 = R_5 + 3R_3;$$

$$\Sigma_2 = R_3;$$

$$\Sigma_5 = R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2;$$

$$\Sigma_3 = R_4 + R_2;$$

$$\Sigma_6 = R_7 + 35R_5 + 35R_2 \cdot R_3 + 84R_3.$$

Remarques :

- Σ_k est de degré $k + 1$ et son terme dominant est R_{k+1} .
- tous les monômes ont un degré total de même parité que $k + 1$.

Conjecture (Kerov 2000)

$\forall k \geq 1$, les coefficients de K_k sont positifs.

Une preuve de la conjecture de Kerov

L'expression de Σ_k en fonction des N_G implique (en identifiant les composantes de degré $k + 1$) :

Formule combinatoire pour les cumulants

$$R_{k+1} = \sum_{\substack{\tau, \sigma \in \mathcal{S}_{|\mu|} \\ \mathcal{G}_{\tau, \sigma}^{\tau, \sigma} = \text{arbre}}} \pm N_{G^{\tau, \sigma}}.$$

On va voir comment ces formules combinatoires permettent d'interpréter les coefficients des polynômes de Kerov.

Théorème (conjecture de Kerov, F. 2007)

$\forall k \geq 1$, les coefficients de K_k sont positifs.

Une algèbre de graphe bicolore

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{C}[R_2, R_3, \dots] \\
 = & \mathbb{C}[\Sigma_1, \Sigma_2, \dots] \hookrightarrow \mathcal{N} = \langle N_G \rangle_G \text{ graphe bicolore} \hookrightarrow \mathbb{C}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\
 = & \langle \Sigma_\mu \rangle_\mu \text{ partition}
 \end{aligned}$$

- on a des expressions combinatoires des Σ_k et des R_i dans \mathcal{N} .

$$\Sigma_k = \sum_{\text{graphes}} \pm N_G, \quad R_i = \sum_{\text{arbres}} \pm N_A$$

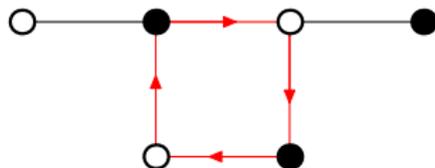
- L'égalité $\Sigma_k = K_k(R_2, R_3, \dots)$ se traduit dans \mathcal{N} :

$$\sum_{\text{graphes}} \pm N_G = \sum_{\text{forêts}} \pm N_F$$

- Pour bien la comprendre, il faut étudier les relations entre les générateurs de l'algèbre \mathcal{N} \longrightarrow opération de *poinçonnage*

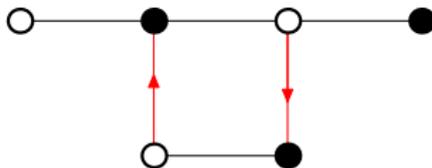
Poinçonnage

Soit G un graphe bicolore et C un cycle orienté de G .



Poinçonnage

Considérons l'ensemble des arêtes de C allant d'un sommet blanc vers un sommet noir.



Poinçonnage

On considère la somme alternée suivante :

$$T_C \left(\begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ & \circ & \bullet & \end{array} \right) = \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ & \circ & \bullet & \end{array} + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ & \circ & \bullet & \end{array} - \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ & \circ & \bullet & \end{array}$$

Poinçonnage

On considère la somme alternée suivante :

$$T_C \left(\begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & | & \\ \circ & \bullet & & \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ \circ & \bullet & & \bullet \end{array} + \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ \circ & \bullet & & \bullet \end{array} - \begin{array}{cccc} \circ & \bullet & \circ & \bullet \\ & | & & \\ \circ & \bullet & & \bullet \end{array}$$

Proposition

\mathcal{N} est invariant par poinçonnage. D'où le morphisme d'algèbres

$$\langle G \rangle / (G = T_C(G)) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$$

Poinçonnage

On considère la somme alternée suivante :

$$T_C \left(\begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ | \quad | \\ \circ \quad \bullet \end{array} \right) = \begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ | \\ \circ \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ | \\ \circ \quad \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \\ | \\ \circ \quad \bullet \end{array}$$

Proposition

\mathcal{N} est invariant par poinçonnage. D'où le morphisme d'algèbres

$$\langle G \rangle / (G = T_C(G)) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$$

Conjecture

C'est un isomorphisme.

Une algèbre générée par les arbres

Corollaire

$$\mathcal{N} = \langle N_F \rangle_{F \text{ forêts}}$$

Pour écrire N_G en fonction des N_F il faut itérer le poinçonnage.
 Plusieurs écritures possibles (pas de confluence) :

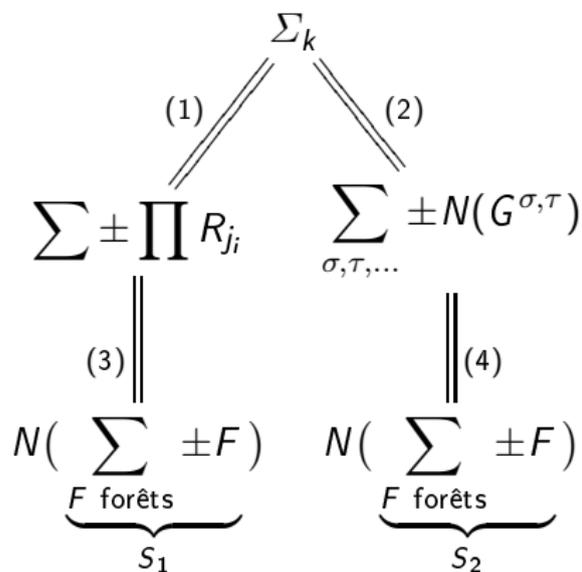
$$\begin{aligned} & N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \circ \text{---} \bullet \end{array} \right) \\ &= N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \\ \circ \text{---} \bullet \end{array} \right) + N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \right) - N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \\ \circ \end{array} \right) \\ &= N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \circ \quad \bullet \end{array} \right) + N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \\ \circ \text{---} \bullet \end{array} \right) - N \left(\begin{array}{c} \circ \text{---} \bullet \text{---} \circ \text{---} \bullet \\ | \quad | \\ \circ \quad \bullet \end{array} \right) \end{aligned}$$

Pas de confluence, mais...

$$F_\nu := \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \quad (\text{ici, } \nu = 5, 3, 2, 2)$$

- (Dołęga, Féray, Śniady 2008) Le coefficient de la forêt *minimale* F_ν ne dépend pas des cycles choisis. On en a même une description !
- Si G carte planeaire enracinée et si on prend uniquement des cycles orientés dans le sens trigonométrique, alors c'est confluent.
- (Féray 2007) Résultat similaire pour une carte quelconque (par exemple les $G^{\sigma, \tau}$).

Schéma de la preuve

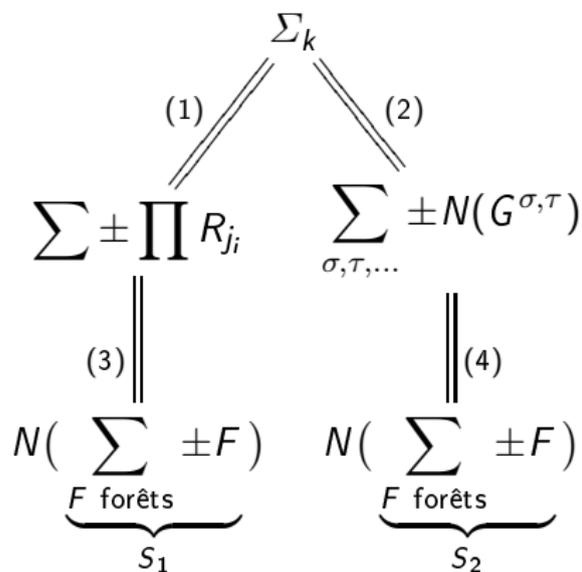


(1) polynôme de Kerov

(2), (3) formules de Σ_k et R_i en fonction des N_G

(4) on itère le poinçonnage qui laissent N invariant.

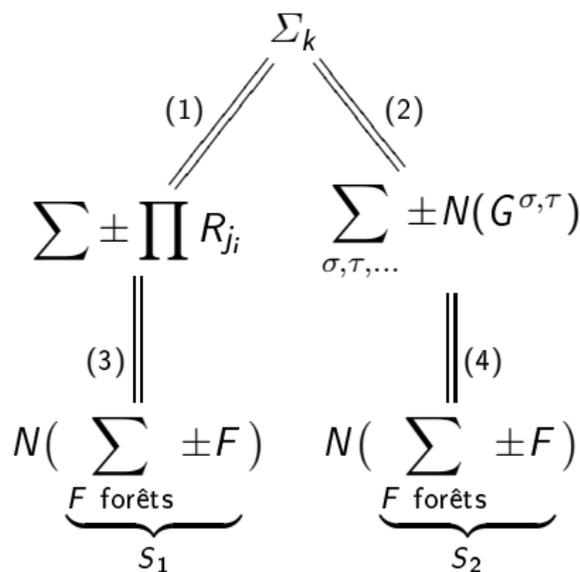
Schéma de la preuve



Si on regarde les forêts minimales,

$$\prod_i R_{\nu_i} = N(F_\nu) + N\left(\begin{array}{l} \text{forêts non} \\ \text{minimales} \end{array}\right)$$

Schéma de la preuve



Si on regarde les forêts minimales,

$$\prod_i R_{\nu_i} = N(F_\nu) + N(\text{forêts non minimales})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 \left[\prod_i R_{\nu_i} \right] K_k &= [F_\nu] S_1 \\
 &\stackrel{?}{=} [F_\nu] S_2.
 \end{aligned}$$

Schéma de la preuve

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \swarrow & & \searrow (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_{S_1}\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_{S_2}\right) \\
 \left[\prod_i R_{\nu_i} \right] K_k = [F_\nu] S_1 \stackrel{?}{=} [F_\nu] S_2.
 \end{array}$$

Les N_F ne sont pas linéairement indépendants. Donc, en général, $S_1 \neq S_2$.

Le coefficient de F_ν dans une somme de forêts est bien défini dans

$$\langle G \rangle / (G = T_C(G))$$

mais pas dans \mathcal{N} .

Schéma de la preuve

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \swarrow & & \searrow (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_{S_1}\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_{S_2}\right) \\
 \\
 \left[\prod_i R_{\nu_i} \right] K_k = [F_\nu] S_1 \stackrel{?}{=} [F_\nu] S_2.
 \end{array}$$

Lemme (difficile)

Avec le choix particulier de cycles évoqué précédemment pour obtenir (4), alors $S_1 = S_2$.

Or $[F_\nu] S_2$ ne dépend pas du choix de cycles. Donc

$$[F_\nu] S_1 = [F_\nu] S_2$$

Interprétation des coefficients

Théorème (Dołega, Féray, Śniady 2008)

Le coefficient de $R_2^{s_2} R_3^{s_3} \cdots$ dans K_k est égal au nombre de triplets (σ, τ, q) tels que :

- $\sigma \circ \tau = (1 \dots k)$;
- $|C(\sigma)| = s_2 + s_3 + \cdots$;
- $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + \cdots$;
- $q : C(\sigma) \rightarrow \mathbb{N}^*$ vérifie $q^{-1}(i) = s_{i+1}$;
- q -condition des mariages non saturée.

Les coefficients de K_k comptent des factorisations (colorées) dans S_k !

Deux preuves différentes, une utilisant les idées présentées ici.

Algèbre liée aux ensembles ordonnés

Le poinçonnage, généralisé aux graphes orientés, apparaît dans un autre domaine :

Soit G un graphe orienté. Posons

$$\mathcal{L}(G) = \left\{ \begin{array}{l} \text{ordres totaux } \leq \text{ sur} \\ \text{les sommets de } G \end{array} \text{ t.q. } (\exists e : v_1 \rightarrow v_2 \in E_G \Rightarrow v_1 \leq v_2) \right\}$$

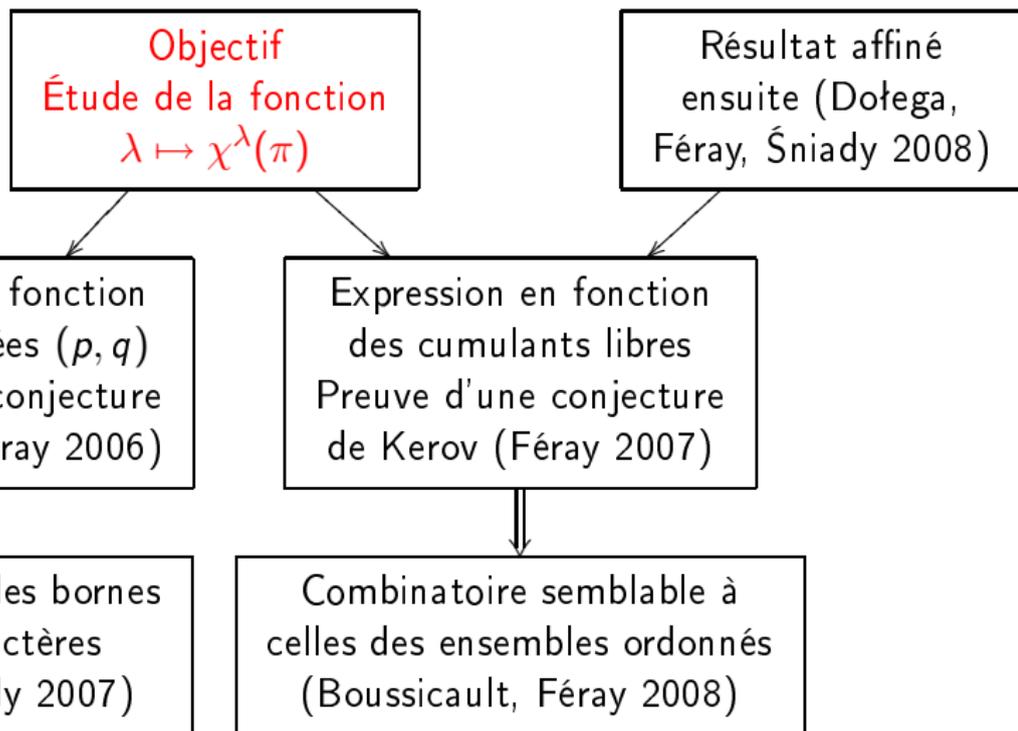
$$\varphi(G) = \sum_{\leq \in \mathcal{L}(G)} x^{\leq}$$

Proposition

$$\langle G \rangle / \text{Ker}(\varphi) \simeq \langle G \rangle / (G = T_C(G))$$

Cette remarque a donné lieu à un travail avec A. Boussicault (2008), non exposé ici.

Synthèse des résultats



Perspectives

Plusieurs directions :

- 1 Compter les cartes intervenant dans les différentes expressions de Σ_μ :
dans le cas des polynômes de Kerov, les coefficients ont des formes non expliquées encore combinatoirement (méthode analytique de Goulden et Rattan et exploration numérique de Lassalle).
- 2 Autre famille de fonctions sur \mathcal{Y} à étudier : fonctions de Schur décalées, fonctions puissance des contenus, ...
- 3 Application à l'asymptotique des représentations : travail en cours sur la q -mesure de Plancherel avec P.-L. Méliot.