Énumération de certaines factorisations d'un long cycle

Valentin Féray
Travail en commun avec Ekaterina Vassilieva (LiX)

LaBRI

Séminaire *Combinatoire énumérative et algébrique*
Bordeaux, 18 décembre 2009

Problème étudié

Question

Soit $m \leq N$ avec $m \equiv N \pmod 2$. Quel est le nombre $B(N, m)$ de permutations β de taille N :

- avec m cycles (notation : $\kappa(\beta) = m$) ;
- telles que $(1\ 2\ \ldots N)\beta^{-1}$ soit un long cycle ?

Problème étudié

Question

Soit $m \leq N$ avec $m \equiv N \pmod 2$. Quel est le nombre $B(N,m)$ de permutations β de taille N :

- avec m cycles (notation : $\kappa(\beta) = m$) ;
- telles que $(1\ 2\ \ldots N)\beta^{-1}$ soit un long cycle ?

Motivations

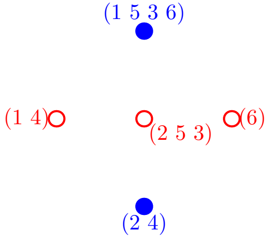
- coefficients particuliers de polynômes permettant de calculer les caractères irréductibles du groupe symétrique.
- formule surprenante (Stanley, 2009) :

$$\frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m) = \left|\{\sigma \in \mathfrak{S}_{N+1} \text{ avec } \kappa(\beta) = m\}\right|.$$

Permutations et cartes

$$(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \longleftrightarrow \text{ carte bipartite étiquetée.}$$

Exemples : $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.

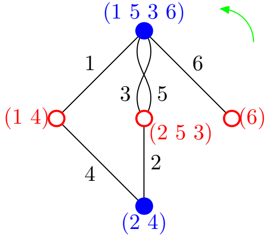


$$\begin{array}{ccl} V_\bullet & \simeq & C(\sigma) \text{ (cycles de } \sigma) \\ V_\circ & \simeq & C(\tau) \text{ (cycles de } \tau) \end{array}$$

Permutations et cartes

$$(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \longleftrightarrow \text{ carte bipartite étiquetée.}$$

Exemples : $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.



Carte $M^{\sigma,\tau}$

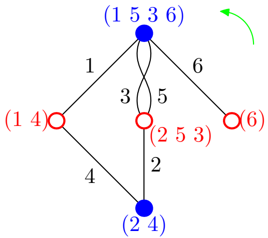
$\{$arêtes entre $c_1 \in C(\sigma)$ et $c_2 \in C(\tau)\} \simeq c_1 \cap c_2$

Ordre donné par le cycle

Permutations et cartes

$$(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_n^2 \longleftrightarrow \text{ carte bipartite étiquetée.}$$

Exemples : $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.



Carte $M^{\sigma,\tau}$

cycles du produit $\longleftrightarrow$ faces de la carte.

Reformulation en termes de cartes

$$\frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m)$$

$B(N,m)$ = nombre de cartes (bipartites unicellulaires enracinées) avec :

- N arêtes ;
- 1 sommet blanc ;
- m sommets noirs.

$s(N+1,m)$ = nombre de cartes (bipartites unicellulaires enracinées) avec :

- $N+1$ arêtes ;
- pas de condiion sur les sommets blancs ;
- m sommets noirs.

Méthode utilisée

Théorème (Jackson, 1988)

Soit $B(N,m,q) = |\{\beta \in S_n \text{ t.q. } \kappa(\beta) = m \text{ et } \kappa((1\ 2\ \ldots N)\beta^{-1}) = q\}|$.

$$\sum_{m,q} B(N,m,q) x^m y^q = \sum_{p,r} \frac{N!(N-1)!}{p!(p-1)!r!(r-1)!(N-p-r+1)!} (x)_p (y)_r,$$

where $(x)_p = x(x-1)\ldots(x-p+1)$.

preuve combinatoire (Schaeffer, Vassilieva, 2008) consistant à :

- Écrire $\sum_{m,q} B(N,m,q) x^m y^q = \sum_{p,r} C(N,p,r)(x)_p(y)_r$.
- Identifier les objets combinatoires compter par $C(N,p,r)$.
- Les compter bijectivement.

Approche semblable ici (pas de bijection directe ☹)

Plan de l'exposé

1. Formulation équivalente

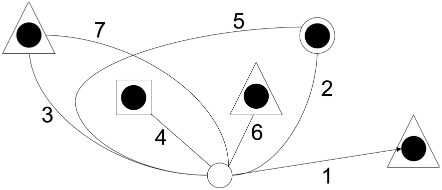
2. Preuve combinatoire

Cartes semi-partitionées

Soit $C(N+1,p)$ définis par :

$$\sum_p C(N+1,p)(x)_p = \sum s(N+1,m)x^m.$$

$C(N+1,p)$ compte le nombre de cartes avec une partition des sommets noirs en p parts :



Cartes étoilées semi-partitionnées

Soit $D(N,p)$ définis par :

$$\sum_p D(N,p)(x)_p = \sum B(N,m)x^m.$$

$D(N,p)$ compte le nombre de cartes avec :

- une partition des sommets noirs en p parts ;
- un seul sommet blanc.

Changement de base

$$\forall m \equiv N \pmod 2, \quad \frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m)$$

$$\Updownarrow$$

$$N(N+1)\sum_m B(N,m)x^m = \sum_m s(N+1,m)x^m + (-1)^{m+N}\sum_m s(N+1,m)x^m$$

$$\Updownarrow$$

$$N(N+1)\sum_p D(N,p)(x)_p = \sum_p C(N+1,p)(x)_p - (x)_{N+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall p \leq N, \quad N(N+1)D(N,p) = C(N+1,p)$$

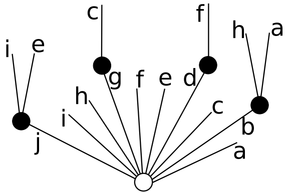
Arbres épineux

Théorème (Morales, Vassilieva 2009)

Il existe une bijection :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Cartes semi-partitionnés} \\ \text{avec } m \text{ blocks noirs} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{arbres épineux permutés avec} \\ 1 \text{ racine blanche et } p \text{ sommets noirs} \end{array} \right\}$$

Exemple d'arbre épineux permuté :



Retour au résultat principal

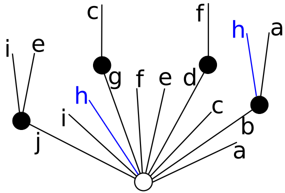
$$\forall m \equiv N \pmod 2, \quad \frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m)$$

$$\iff \quad \forall p, \quad D(N,p) = \frac{1}{N(N+1)} C(N+1,p)$$

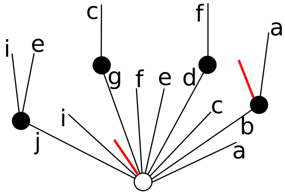
Lemme

$$(N+1-p)C(N+1,p) = N(N+1)C(N,p)$$

Preuve :



$\overset{\sim}{\mapsto}$



Retour au résultat principal

$$\forall m \equiv N \pmod 2, \quad \frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m)$$

$$\iff \quad \forall p, \quad D(N,p) = \frac{1}{N(N+1)} C(N+1,p)$$

$$\iff \quad \forall p, \quad D(N,p) = \frac{1}{N+1-p} C(N,p)$$

Retour au résultat principal

$$\forall m \equiv N \pmod 2, \quad \frac{N(N+1)}{2} B(N,m) = s(N+1,m)$$

$$\iff \quad \forall p, \quad D(N,p) = \frac{1}{N(N+1)} C(N+1,p)$$

$$\iff \quad \forall p, \quad D(N,p) = \frac{1}{N+1-p} C(N,p)$$

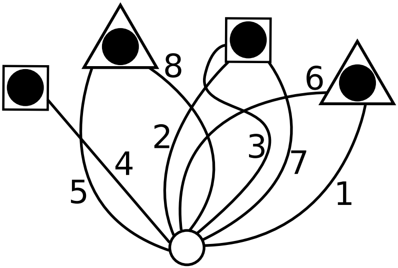
Conserve les valences des sommets :
$\Rightarrow$ on obtient un raffinement du résultat de Stanley

Théorème (F., Vassilieva 2009)

$$\frac{(N+1)}{2} \sum_{\lambda \nearrow \mu} B(\lambda) = s(\mu)$$

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (1)

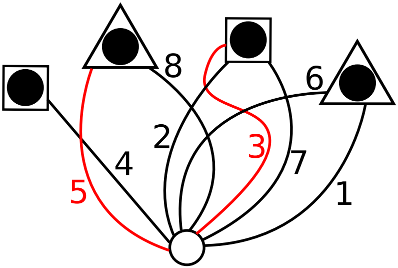
Première étape : on construit un arbre épineux étiqueté



Carte semi-partitionnée de départ

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (1)

Première étape : on construit un arbre épineux étiqueté

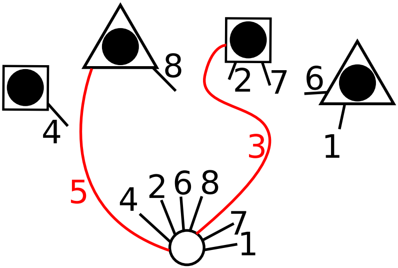


Considérons les arêtes $\beta(m_i)$ avec m_i maximum d'un bloc.

Rq : l'arête la plus à gauche $\beta(N)$ est toujours un $\beta(m_i)$

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (1)

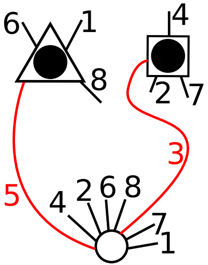
Première étape : on construit un arbre épineux étiqueté



Coupons toutes les autres arêtes en 2 épines.

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (1)

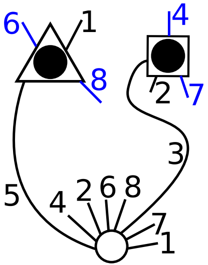
Première étape : on construit un arbre épineux étiqueté



On rassemble les sommets d'un même bloc (précisions au tableaux)

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (1)

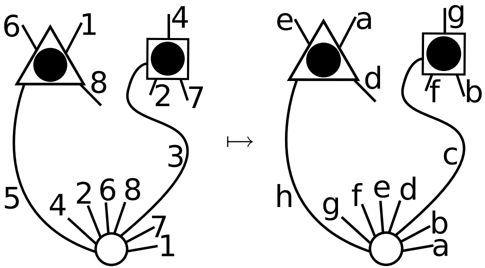
Première étape : on construit un arbre épineux étiqueté



Facilement inversible !

Des cartes étoilées semi-partitionnées aux arbres épineux permutés (2)

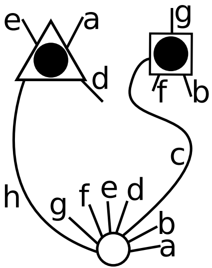
Deuxième étape : on oublie les étiquettes



Des arbres épineux permutés aux cartes étoilées semi-partitionnées

Deuxième étape : on oublie les étiquettes

$\mapsto$



On peut les retrouver !

Comment trouver $\beta(i)$?

- la réponse dépend de si i est une saillance.
  - Si non, $\beta(i)$ précède i (sens horaire).
  - Si oui, $\beta(i)$ précède la saillance suivante, i.e. le prochain élément qui n'a pas encore de valeur attribuée.

Comment trouver $\beta(i)$?

- la réponse dépend de si i est une saillance.
  - Si non, $\beta(i)$ précède i (sens horaire).
  - Si oui, $\beta(i)$ précède la saillance suivante, i.e. le prochain élément qui n'a pas encore de valeur attribuée.

- comment savoir si i est une saillance ?

  Il suffit de regarder si il y a avant i des épines sans valeur attribuée (qui auront alors une valeur $> i$), au quel cas i n'est pas une saillance.

Comment trouver $\beta(i)$?

- la réponse dépend de si i est une saillance.
  - Si non, $\beta(i)$ précède i (sens horaire).
  - Si oui, $\beta(i)$ précède la saillance suivante, i.e. le prochain élément qui n'a pas encore de valeur attribuée.
- comment savoir si i est une saillance ?

  Il suffit de regarder si il y a avant i des épines sans valeur attribuée (qui auront alors une valeur $> i$), au quel cas i n'est pas une saillance.

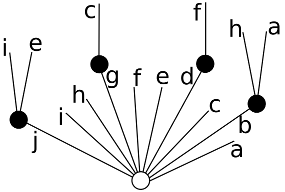
Lemme

$\beta(i)$ ne peut être l'étiquette d'une arête que si toutes les épines du bloc correspondant et cette arête ont une valeur $\leq i$.

Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

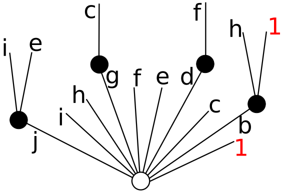
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

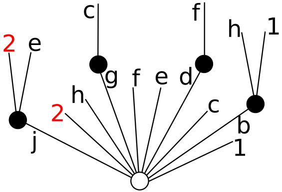
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

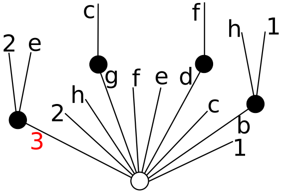
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

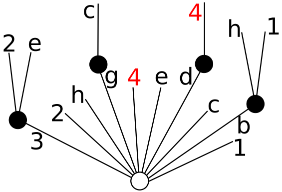
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

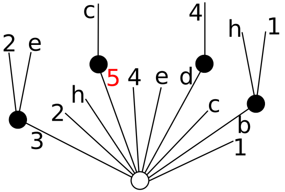
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

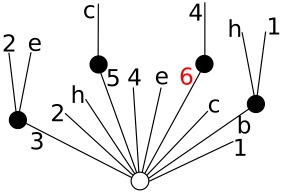
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

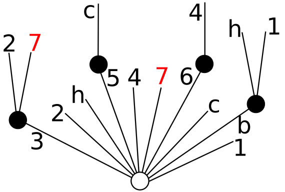
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

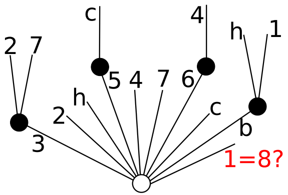
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

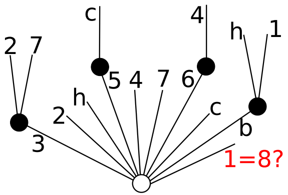
Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



Pourquoi n'est-ce pas une bijection ?

Rappel : l'élément le plus à gauche n'est jamais une épine.

Mais ça ne suffit pas, pour que l'arbre soit dans l'image.



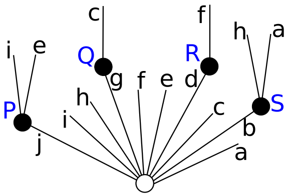
arbre n'est pas dans l'image

$\iff$ l'élément 1 reçoit une seconde étiquette.

$\iff$ le bloc de gauche est complété avant un des autres.

Ordre de complétion des sommets

C'était prévisible ! En effet :

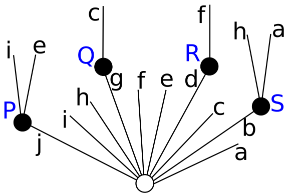


- Rappel : b ne peut être choisi comme $\beta(i)$ que si le bloc S est complètement étiqueté à l'étape i.

  Mais $b = \beta(i) \Rightarrow c = i + 1$. Donc S est nécessairement complètement étiqueté avant Q

Ordre de complétion des sommets

C'était prévisible ! En effet :



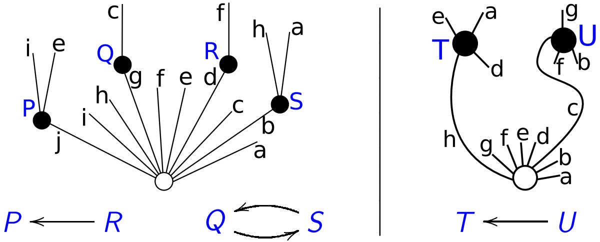
- Rappel : b ne peut être choisi comme $\beta(i)$ que si le bloc S est complètement étiqueté à l'étape i.

  Mais $b = \beta(i) \Rightarrow c = i + 1$. Donc S est nécessairement complètement étiqueté avant Q
- Même raisonnement montre que Q est nécessairement complètement étiqueté avant S.

Conclusion : il est impossible d'étiqueter cet arbre épineux permuté.

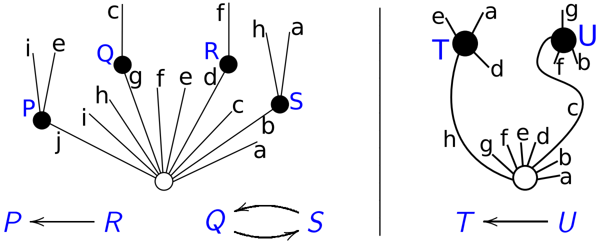
Ordre de complétion des sommets (2)

En général, on dessine un graphe orienté donnant des conditions sur l'ordre de complétion des sommets.



Ordre de complétion des sommets (2)

En général, on dessine un graphe orienté donnant des conditions sur l'ordre de complétion des sommets.



- si il contient un cycle orienté, arbre n'est pas dans l'image.
- si c'est un arbre orienté, arbre est dans l'image.

On est toujours dans l'un ou l'autre cas !

Dénombrement

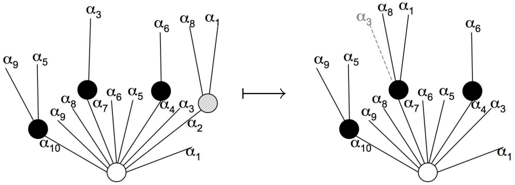
Proposition

La proportion d'arbres épineux permutés dans l'image parmi tous ceux dont les valences des sommets noirs sont données par une partition λ est

$$\frac{1}{|\lambda|-\ell(\lambda)+1}$$

Preuve par récurrence sur le nb de sommets noirs $\ell(\lambda)$:

idée : on construit une bijection qui diminue le nombre de sommets noirs et conserve le fait d'être dans l'image



Fin

Joyeuses fêtes !

après les questions...