Une formule combinatoire pour les caractères irréductibles du groupe symétrique

Valentin Féray

21 mars 2007

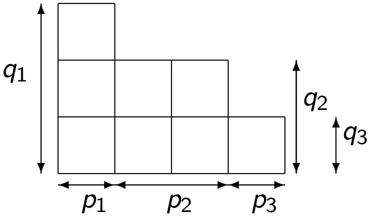
Plan

1. Stanley's formula

Plan

Représentations irréductibles du groupe symétrique

- indexées par les partitions $\lambda \vdash n$.
- celles-ci sont représentées par les diagrammes de Young.
- autre notation $\lambda = \mathbf{p} \times \mathbf{q}$.



$$\lambda_1 = 3; \lambda_2 = \lambda_3 = 2; \lambda_4 = 1; \lambda_5 = \ldots = 0,$$

$$\lambda = (1, 2, 1) \times (3, 2, 1)$$

Cas simple

On a une formule combinatoire simple pour le caractère dans le cas où $\lambda = (p) \times (q) \vdash n$.
Soit $\mu \in S(k)$. Comme $S(k) \subset S(n)$, on peut calculer la valeur du caractère χ^λ sur μ.

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{\chi^\lambda(\mu)}{\chi^\lambda(1)} = (-1)^k \sum_{\sigma \in S(k)} p^{|C(\sigma)|}(-q)^{|C(\sigma^{-1}\mu)|}$$

où $C(\sigma)$ désigne l'ensemble des orbites de $\{1, \dots, k\}$ sous l'action de σ.
On notera le membre de gauche Σ^λ_μ.

Notations pour généraliser

- Un coloriage de τ est une fonction

$$\varphi : C(\tau) \longrightarrow \mathbb{N}^\star$$

- Si (τ, φ) est une permutation colorée, on regardera le coloriage de $\tau^{-1}\mu$ défini par

$$\psi(c) = \max_{a \in c} \varphi(a)$$

- On notera aussi $\mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)}$ le monôme :

$$\prod p_i^{\text{nb de cycles de couleur i}}$$

Formule générale

$$\Sigma_\mu^\lambda = (-1)^k \sum_{\tau \in S(k)} \sum_{\varphi \text{ coloriage de } \tau} \mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)} (-\mathbf{q})^{\kappa(\tau^{-1}\mu,\psi)}$$

Remarques :

- Intéressante pour des "petites" permutations.
- La combinatoire est assez complexe.

Applications

Comportement asymptotique :

- On peut en déduire une borne supérieure pour le caractère renormalisé.
- Et un équivalent de certaines suites.

Exprimer le caractère sur un cycle comme un polynôme dont les indéterminées sont des grandeurs caractérisant λ.

Contrôles des termes de la somme

Objectif : trouver une borne supérieure intéressante pour

$$|Col(\tau)| := \sum_{\varphi \text{ coloriage de } \tau} \mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)} (\mathbf{q})^{\kappa(\tau^{-1}\sigma,\psi)}$$

Supposons que λ a moins de A lignes et de A colonnes, *i.e.* :

$$q_i \leq A, \qquad \sum_i p_i \leq A$$

Contrôles des termes de la somme

Objectif : trouver une borne supérieure intéressante pour

$$|Col(\tau)| := \sum_{\varphi \text{ coloriage de } \tau} \mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)} (\mathbf{q})^{\kappa(\tau^{-1}\sigma,\psi)}$$

Supposons que λ a moins de A lignes et de A colonnes, alors :

$$\begin{aligned} |Col(\tau)| &\leq \sum_{\varphi \text{ coloriage de } \tau} \mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)} A^{|C(\tau^{-1}\sigma)|} \\ &\leq A^{|C(\tau^{-1}\sigma)|} \left(\sum_i p_i \right)^{|C(\sigma)|} \\ &\leq A^{|C(\tau)|+|C(\tau^{-1}\mu)|} \end{aligned}$$

Borne supérieure pour le caractère renormalisé

Si on fixe la permutation μ,

$$|C(\tau)| + |C(\tau^{-1}\mu)| \leq 2k - l(\mu)$$

On en déduit

$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu)}{\chi^\lambda(1)} \right| \leq \text{cstte} \cdot \frac{A^{2k-l(\mu)}}{n^k}$$

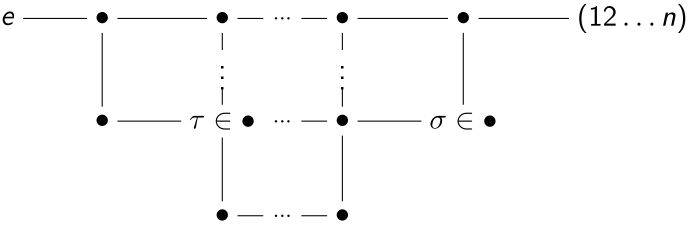
En particulier, si $A \leq cstte\sqrt{n}$ (diagramme équilibré),

$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu)}{\chi^\lambda(1)} \right| \leq \text{cstte} \cdot n^{-l(\mu)/2}$$

Si on veut une égalité valable quelque soit μ, il faut contrôler le nombre de permutations τ ayant une valeur donnée de $|C(\tau)| + |C(\tau^{-1}\mu)|$...

Borne supérieure pour le caractère renormalisé

Exemple pour $\mu = (1 \dots k)$



Chaque permutation est placée selon ses distances respectives à e et $(1 \dots k)$.
Toute permutation τ de la k-ième ligne est dans un intervalle $[e; \sigma]$ où σ est à la fin de la même ligne.

Borne supérieure pour le caractère renormalisé

$$\begin{aligned} |\{\tau \in S(k) : |C(\tau)| + |C(\tau^{-1}\sigma)| = k+1-2g\}| & \\ \leq & \text{ nb de perm. à la fin de la g-ième ligne} \cdot 4^k \\ \leq & \frac{1}{(2g)!}\left(\frac{K^2}{2}\right)^{2g} 4^k \end{aligned}$$

Avec une méthode similaire pour μ général, on peut montrer :

$$\left|\frac{\chi^\lambda(\mu)}{\chi^\lambda(1)}\right| \leq \text{cstte} \cdot \left(\frac{1}{n}\max(A, |\operatorname{Supp}(\mu)|)\right)^{-l(\mu)/2}$$

Terme dominant

Revenons au cas où μ est fixé. L'ensemble des permutations telles que $|C(\tau)| + |C(\tau^{-1}\mu)| = 2k - l(\mu)$ (qui apportent la plus grande contribution au caractère) est isomorphe à

$$\prod NC(k_i) \text{ (ensembles de partitions non croisées)}$$

où les k_i sont les longueurs des cycles de μ.
On pose alors

$$R_{l+1} = (-1)^l \sum_{\tau \in NC(l)} \sum_{\varphi \text{ coloriage de } \tau} \mathbf{p}^{\kappa(\tau,\varphi)} (-\mathbf{q})^{\kappa(\tau^{-1}\tau)}$$

Equivalents

$$\left| \frac{\chi^\lambda(\mu)}{\chi^\lambda(1)} - \frac{\prod_i R_{k_i+1}}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \right| \leq \text{cstte} \cdot \frac{A^{2k-2-l(\mu)}}{n^k}$$

Or les **cumulants libres** $R_l(\lambda_n)$ d'une suite de diagrammes ayant une forme limite vérifient :

$$R_l(\lambda_n) \sim_{n\to\infty} c|\lambda_n|^{l/2}$$

Finalement, comme une telle suite est constitué de diagrammes équilibrés

$$\frac{\chi^{\lambda_n}(\mu)}{\chi^\lambda(1)} \sim cstte|\lambda_n|^{-l(\mu)/2}$$

Polynômes de Kerov

En fait, les cumulants libres permettent aussi d'obtenir une formule exacte sous forme d'un polynôme

$$\Sigma^{\lambda}_{(1\dots k)} = K_k(R_2(\lambda), \dots, R_{k+1}(\lambda))$$

K_k : k-ième polynôme de Kerov
Théorème : polynôme universel (ne dépendant pas de λ) à coefficients entiers.
Conjecture : les coefficients sont positifs

Polynômes de Kerov

A partir de notre formule, l'existence de ce polynôme est mystérieuse...
mais on peut en comprendre certains coefficients
Méthode :
Regarder les coefficients de certains monômes en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ (par exemple $p_1 q_1^l$) dans

$$\begin{aligned} K_k(R_2(\mathbf{p},\mathbf{q}),\dots,R_{k+1}(\mathbf{p},\mathbf{q})) &= \\ (-1)^k \sum_{(\tau,\varphi)\in S(k)^{(m)}} & \left(\prod_{b\in C(\tau)} p_{\varphi(b)} \prod_{c\in C(\tau^{-1}(1\dots k))} -q_{\psi(c)} \right), \end{aligned}$$

Interprétation combinatoire des coefficients

Membre de gauche : seul le monôme R_{l+1} apporte une contribution non nulle

$$[p_1 q_1^l] K_k = [R_{l+1}] K_k$$

Membre de droite : les cycles maximaux τ tel que $|C(\tau^{-1}(1 \dots k))| = l$ apportent une contribution.

Le coefficient de R_{l+1} dans K_k est le nombre de cycles τ tel que $|C(\tau^{-1}(1 \dots k))| = l$ (0 si k et l ont la même parité).
Un tel raisonnement est plus dur pour les termes de plus haut degré car il faut retirer la contribution de ceux de degré inférieur.