Produits de longs cycles dans le groupe symétrique

Valentin Féray

Travail en commun avec Amarpreet Rattan (University of London)

LaBRI, CNRS

Journées Aléa

CIRM (Marseille), 11 mars 2011

Question générale

Soit σ une permutation de type λ dans S_n.

Combien de décomposition $\sigma = \pi \cdot \tau$ avec :

- π de type μ ;
- τ de type ν ?

Question générale

Soit σ une permutation de type λ dans S_n.

Combien de décomposition $\sigma = \pi \cdot \tau$ avec :

- π de type μ ;
- τ de type ν ?

Motivations :

- dénombrement d'hypercartes ;
- centre de l'algèbre du groupe symétrique

Un très joli résultat

Theorem

Toute permutation impaire $\sigma \in S_n$ s'écrit de

$$2(n-2)!$$

manières différentes comme produit :

- *d'un cycle de longueur n ;*
- *et d'un cycle de longueur $n-1$.*

Bijections de Machí (92), Cori, Marcus et Schaffer (10).
Preuve algébrique (avec des caractères) de Jones (97).

Plus généralement

Theorem

Soient $a > 1$ et ρ une partition de a.
Le nombre de factorisations d'une permutation σ en

- *un cycle de longueur n ;*
- *et une permutation de type $(n-a) \cup \rho$*

Plus généralement

Theorem

Soient $a > 1$ et ρ une partition de a.
Le nombre de factorisations d'une permutation σ en

- *un cycle de longueur n ;*
- *et une permutation de type $(n-a) \cup \rho$*

s'écrit sous la forme

$$(n-a-1)!P_\rho(n, m_1, m_2, \dots, m_{a-1})$$

- *m_i est le nombre de cycles de longueur i de σ ;*
- *P_ρ est un polynôme.*

Plus généralement

Theorem

Soient $a > 1$ et ρ une partition de a.
Le nombre de factorisations d'une permutation σ en

- *un cycle de longueur n ;*
- *et une permutation de type $(n-a) \cup \rho$*

s'écrit sous la forme

$$(n-a-1)! P_\rho(n, m_1, m_2, \dots, m_{a-1})$$

- *m_i est le nombre de cycles de longueur i de σ ;*
- *P_ρ est un polynôme.*

Preuve : En utilisant des caractères

Idée pour $\rho = 1^a$

Le cas $a = 1$ est connu. On va faire une récurrence sur a.

Idée pour $\rho = 1^a$

Le cas $a = 1$ est connu. On va faire une récurrence sur a.

Soit, dans S_n,

$$\begin{array}{lccccc} \text{types :} & \lambda & & (n) & & (n-a, 1^a) \\ & \sigma & = & \alpha & \cdot & \beta \end{array}$$

Idée pour $\rho = 1^a$

Le cas $a = 1$ est connu. On va faire une récurrence sur a.

Soit, dans S_n,

$$\begin{array}{lccccc} \text{types :} & \lambda & & (n) & & (n-a, 1^a) \\ & \sigma & = & \alpha & \cdot & \beta \\ & & & & & \\ & (i\ \ n+1)\sigma & = & (i\ \ n+1)\alpha & \cdot & \beta \\ \text{types :} & \mu & & (n+1) & & (n-a, 1^{a+1}) \end{array}$$

où $\mu = \lambda \backslash (j) \cup (j+1)$ pour un certain j.

Idée pour $\rho = 1^a$

Le cas $a = 1$ est connu. On va faire une récurrence sur a.

Soit, dans S_n,

$$\begin{array}{lccccc} \text{types :} & \lambda & & (n) & & (n-a, 1^a) \\ & \sigma & = & \alpha & \cdot & \beta \\ & & & & & \\ & (i\ n+1)\sigma & = & (i\ n+1)\alpha & \cdot & \beta \\ \text{types :} & \mu & & (n+1) & & (n-a, 1^{a+1}) \end{array}$$

où $\mu = \lambda \backslash (j) \cup (j+1)$ pour un certain j.

Problème : $n+1$ est toujours point fixe de la permutation de type $(n-a, 1^{a+1})$
$\Rightarrow$ on n'obtient pas toutes les factorisations

Idée pour $\rho = 1^a$

Le cas $a = 1$ est connu. On va faire une récurrence sur a.

Soit, dans S_n,

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & & (n) & & (n-a, 1^a) \\ \sigma & = & \alpha & \cdot & \beta \\ & & & & \\ (i\ \ n+1)^{(k\ \ n+1)} \sigma^{(k\ \ n+1)} & = & (i\ \ n+1)^{(k\ \ n+1)} \alpha^{(k\ \ n+1)} & \cdot & \beta^{(k\ \ n+1)} \\ \mu & & (n+1) & & (n-a, 1^{a+1}) \end{array}$$

où $\mu = \lambda \backslash (j) \cup (j+1)$ pour un certain j.

Solution : on conjugue par $(k\ \ n+1)$.

Plus précisément

Fixons $\mu \vdash n+1$

Theorem

$(\sigma, \alpha, \beta, i, k) \mapsto (\sigma', \alpha', \beta', k)$ *définit une bijection*

$$\sigma' = (i \ \ n+1)^{(k \ \ n+1)} \sigma^{(k \ \ n+1)}$$
$$\alpha' = (i \ \ n+1)^{(k \ \ n+1)} \alpha^{(k \ \ n+1)}$$
$$\beta' = \beta^{(k \ \ n+1)}$$

Plus précisément

Fixons $\mu \vdash n+1$

Theorem

$(\sigma, \alpha, \beta, i, k) \mapsto (\sigma', \alpha', \beta', k)$ *définit une bijection*

À gauche

- $\sigma = \alpha \cdot \beta$ dans S_n ;
- α n cycle, β $n-a$ cycle, σ de type $\lambda = \mu \backslash (j+1) \cup (j)$ pour un certain j ;
- i dans un cycle de longueur j de σ, k quelconque.

Plus précisément

Fixons $\mu \vdash n+1$

Theorem

$(\sigma, \alpha, \beta, i, k) \mapsto (\sigma', \alpha', \beta', k)$ *définit une bijection*

À gauche

- $\sigma = \alpha \cdot \beta$ dans S_n ;
- α n cycle, β $n-a$ cycle, σ de type $\lambda = \mu \backslash (j+1) \cup (j)$ pour un certain j ;
- i dans un cycle de longueur j de σ, k quelconque.

Dénombrement :

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda = \mu\backslash(j+1)\cup(j)}} \frac{n!}{z_\lambda} F_\lambda^a(n) \cdot j m_j(\lambda) \cdot (n+1)$$

Plus précisément

Fixons $\mu \vdash n+1$

Theorem

$(\sigma, \alpha, \beta, i, k) \mapsto (\sigma', \alpha', \beta', k)$ *définit une bijection*

À droite :

- $\sigma' = \alpha' \cdot \beta'$ dans S_{n+1} ;
- α' $n+1$ cycle, β' $n+1-(a+1)$ cycle, σ' de type μ ;
- k point fixe de β'.

Dénombrement :

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda=\mu\setminus(j+1)\cup(j)}} \frac{n!}{z_\lambda} F_\lambda^a(n) \cdot j m_j(\lambda) \cdot (n+1)$$

Plus précisément

Fixons $\mu \vdash n+1$

Theorem

$(\sigma, \alpha, \beta, i, k) \mapsto (\sigma', \alpha', \beta', k)$ *définit une bijection*

À droite :

- $\sigma' = \alpha' \cdot \beta'$ dans S_{n+1} ;
- α' $n+1$ cycle, β' $n+1-(a+1)$ cycle, σ' de type μ ;
- k point fixe de β'.

Dénombrement :

$$\sum_{\substack{j \\ \lambda=\mu\setminus(j+1)\cup(j)}} \frac{n!}{z_\lambda} F_\lambda^a(n) \cdot j m_j(\lambda) \cdot (n+1) = \frac{n!}{z_\mu} F_\mu^{a+1}(n+1) \cdot (a+1)$$

Conclusion

- On obtient une preuve combinatoire du théorème dans le cas $\rho = (1^a)$ et une récurrence sur les polynômes $P_{(1^a)}$.

Conclusion

- On obtient une preuve combinatoire du théorème dans le cas $\rho = (1^a)$ et une récurrence sur les polynômes $P_{(1^a)}$.
- On peut suivre certaines statistiques :
  par exemple, quelle est la probabilité que 1 et 2 soit dans le même cycle dans un produit d'un n cycle et d'un $n-a$ cycle aléatoires ?
  (question de Stanley)

Conclusion

- On obtient une preuve combinatoire du théorème dans le cas $\rho = (1^a)$ et une récurrence sur les polynômes $P_{(1^a)}$.
- On peut suivre certaines statistiques :
  par exemple, quelle est la probabilité que 1 et 2 soit dans le même cycle dans un produit d'un n cycle et d'un $n - a$ cycle aléatoires ?
  (question de Stanley)
- pas (encore) de construction pour le cas ρ général...