Autour des éléments de Jucys-Murphy : équivalence de trois problèmes combinatoires

Valentin Féray
Laboratoire d'Informatique de l'Institut Gaspard-Monge
Université Paris-Est Marne-La-Vallée

Journée du GT Combinatoire algébrique
Institut Camille Jordan, 15/16 juin 2009

Introduction

- Objectif : montrer l'équivalence des problèmes suivants
  1. compte nombre de factorisations transitives d'une permutation σ en utilisant $(1\ n), \ldots, (n-1\ n)$.
  2. calcul de la *trace* sur $\mathbb{Q}[S_n]$ des puissances de $(\star\ 1) + \ldots + (\star\ n)$.
  3. calcul des fonctions puissances $X_1^r + \ldots + X_n^r$ des éléments de Jucys-Murphy $X_i = (1\ i) + \ldots (i-1\ i)$.

Introduction

- Objectif : montrer l'équivalence des problèmes suivants
  1. compte nombre de factorisations transitives d'une permutation σ en utilisant $(1\ n), \dots, (n-1\ n)$.
  2. calcul de la *trace* sur $\mathbb{Q}[S_n]$ des puissances de $(\star\ 1) + \dots + (\star\ n)$.
  3. calcul des fonctions puissances $X_1^r + \dots + X_n^r$ des éléments de Jucys-Murphy $X_i = (1\ i) + \dots (i-1\ i)$.
- Outils :
  1. propriétés des éléments de Jucys-Murphy
  2. algèbre des permutations partielles (Ivanov, Kerov 1999)

Plan de la présentation

Factorisations transitives étoilées

Les transpositions $(1\ n), (2\ n), \dots, (n-1\ n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.

Problème

Soit σ une permutation et r un entier. Compter le nombre de décompositions

$$\sigma = (i_1\ n) \cdots (i_r\ n),$$

où chaque entier de 1 à $n-1$ apparaît au moins une fois.

Factorisations transitives étoilées

Les transpositions $(1\ n), (2\ n), \dots, (n-1\ n)$ engendrent le groupe symétrique S_n.

Problème

Soit σ une permutation et r un entier. Compter le nombre de décompositions

$$\sigma = (i_1\ n) \cdots (i_r\ n),$$

où chaque entier de 1 à $n-1$ apparaît au moins une fois.

- cas r minimal : J. Irving et A. Rattan (2007).
- cas général : I.P. Goulden et D.M. Jackson (2009).

Fait surprenant

Ce nombre ne dépend que du type de σ (alors que n joue un rôle particulier !).

Fonctions puissances des éléments de JM

Définition des éléments de Jucys-Murphy :

$$X_i = (1\ i) + (2\ i) + \cdots + (i-1\ i) \in \mathbb{Q}[S_n]$$

Propriétés des éléments de JM

- Les X_i commutent 2 à 2.
- $\{P(X_1, \dots, X_n), P \in \mathrm{Sym}\} = Z(\mathbb{Q}[S_n])$.

Fonctions puissances des éléments de JM

Définition des éléments de Jucys-Murphy :

$$X_i = (1\ i) + (2\ i) + \cdots + (i-1\ i) \in \mathbb{Q}[S_n]$$

Propriétés des éléments de JM

- Les X_i commutent 2 à 2.
- $\{P(X_1, \dots, X_n), P \in \mathrm{Sym}\} = Z(\mathbb{Q}[S_n])$.

En particulier, les fonctions puissances

$$p_r(X_1, \dots, X_n) = X_1^r + \cdots + X_n^r$$

sont centrales.

Problème

Écrire ces éléments sur la base $(C_\lambda)_{\lambda \vdash n}$.

Formule de A. Lascoux et J.Y. Thibon (2001).

Traces de la puissance d'un élément de JM

Rappel : $X_{n+1} = (1\ \ n+1) + \dots (n\ \ n+1) \in \mathbb{Q}[S_{n+1}]$.

Défintion

$M_n^r = \mathbb{E}(X_{n+1}^r)$, où $\mathbb{E}$ est l'application linéaire définie par

$$\mathbb{E}(\sigma) = \begin{cases} \sigma & \text{si } \sigma(n+1) = n+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

éléments *centraux* introduits par P. Biane (1998) pour étudier le comportement asymptotique des caractères irréductibles du groupe symétrique

Problème

Écrire ces éléments sur la base $(C_\lambda)_{\lambda \vdash n}$.

P. Biane a calculé le terme dominant en n de certains coefficients.

Équivalence des trois problèmes

Théorème

Fixons $r \in \mathbb{N}^\star$. Il existe des entiers $(g_\lambda)_{\lambda \text{ partition}}$, caractérisés par le point 1 ou 2, tels que :

1. Le nombre de factorisations étoilées transitives de longueur r d'une permutation $\sigma \in S_n$ de type $\lambda \vdash n$ est g_λ.
2. Si, pour $|\lambda| \leq n$, on note $a_{\lambda;n} = \binom{n-|\lambda|+m_1(\lambda)}{m_1(\lambda)} C_{\lambda 1^{n-|\lambda|}}$, alors
$$\forall\ n, \quad p_r(X_1, \dots, X_n) = \sum_{|\lambda| \leq n} g_\lambda a_{\lambda;n}.$$
3. Avec la même notation,
$$\forall\ n, \quad M_n^r = \sum_{|\lambda| \leq n} g_{\lambda \cup 1} a_{\lambda;n}.$$

Conséquences

1. Preuve sans calcul du *fait surprenant* du slide 4 :

Proposition

Le nombre de factorisations étoilées transitives d'une permutation σ ne dépend que de son type cyclique.

2. Les résultats de Goulden/Jackson et de Lascoux/Thibon sont équivalents.

3. On peut déduire de ces résultats une formule pour les éléments de Biane.