

Une variante du lemme des mariages liée aux polynômes de Kerov

Valentin Féray

Laboratoire d'Informatique de l'Institut Gaspard-Monge

Université Paris-Est Marne-La-Vallée

Travaux réalisés avec Piotr Śniady et Macej Dołęga

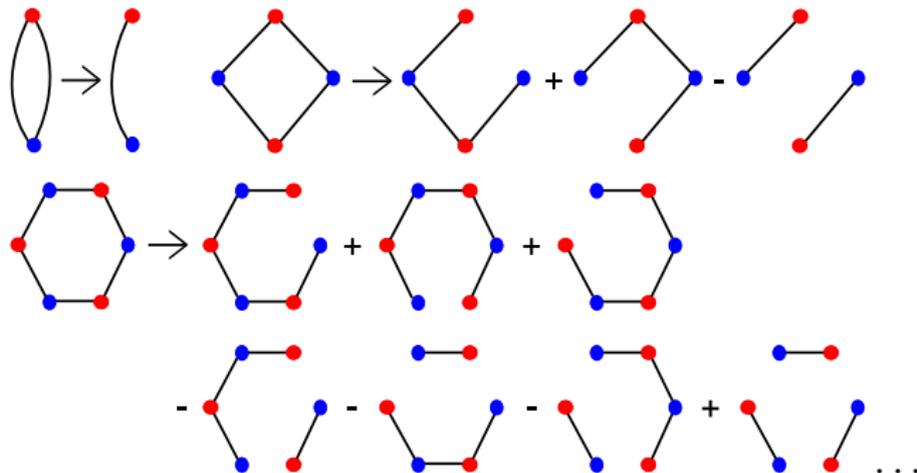
Journée de Combinatoire de Bordeaux

LaBRI, 5 février 2009



Introduction

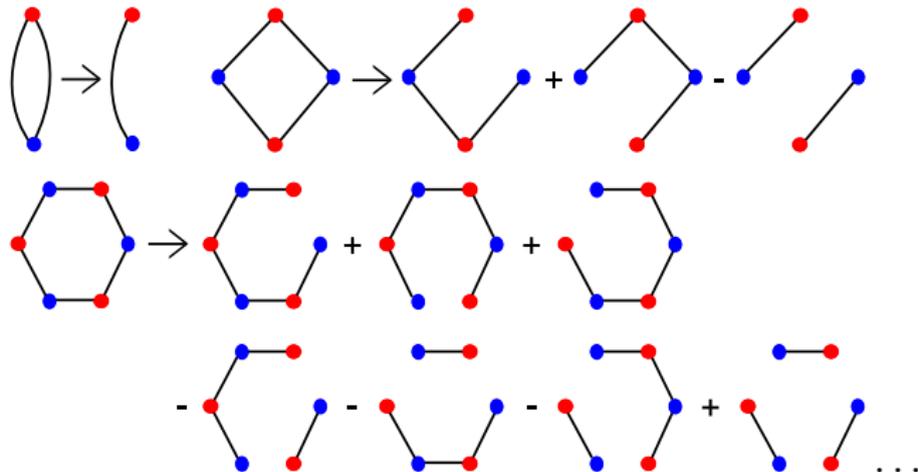
Soit G un graphe bicolore. On itère les transformations locales



jusqu'à n'avoir plus que des forêts. Qu'obtient-on ?

Introduction

Soit G un graphe bicolore. On itère les transformations locales



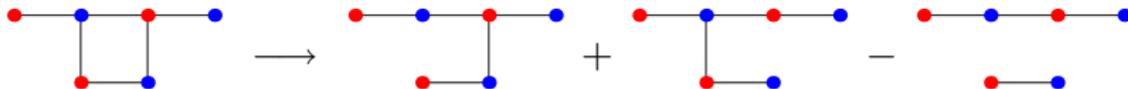
jusqu'à n'avoir plus que des forêts. Qu'obtient-on ?

Problème venant de l'étude des représentations du groupe symétrique

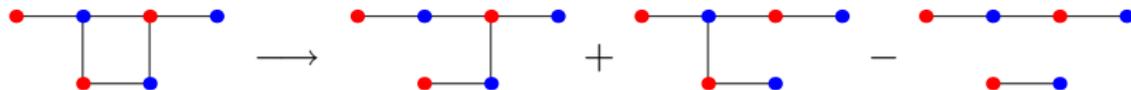
Plan de la présentation

- 1 Décomposition de graphes en somme alternée de forêts
 - Nombre de forêts minimales
 - Outil : équations de transport
 - Esquisse de preuve
- 2 Application aux représentations du groupe symétrique
 - La conjecture de Kerov
 - Une formule combinatoire pour les caractères irréductibles
 - Interprétation combinatoire des polynômes de Kerov

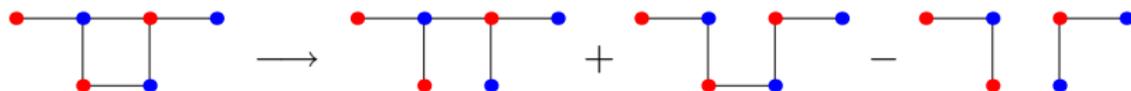
Premier exemple



Premier exemple



Mais aussi



⇒ Algorithme de décomposition non confluent (même à isomorphisme près).

C'est l'exemple le plus simple. Pourtant, pas de forêts tq $\#c.c. = |V_\bullet|$.

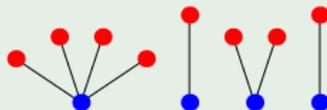
Forêts minimales

Définition

Une forêt bicolore est dite minimale si tous ses sommets bleus sont dans des composantes distinctes.

Exemple

Voici la forêt minimale F_ν de taille $\nu = 5, 3, 2, 2$:



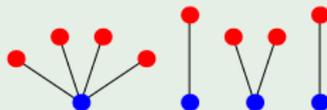
Forêts minimales

Définition

Une forêt bicolore est dite minimale si tous ses sommets bleus sont dans des composantes distinctes.

Exemple

Voici la forêt minimale F_ν de taille $\nu = 5, 3, 2, 2$:

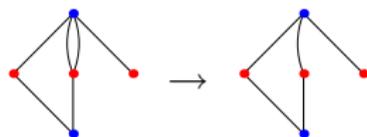


Théorème (DFS 2008)

Le nombre de forêts minimales de taille ν fixée après itération de nos transformations sur un graphe bicolore G ne dépend pas des cycles choisis.

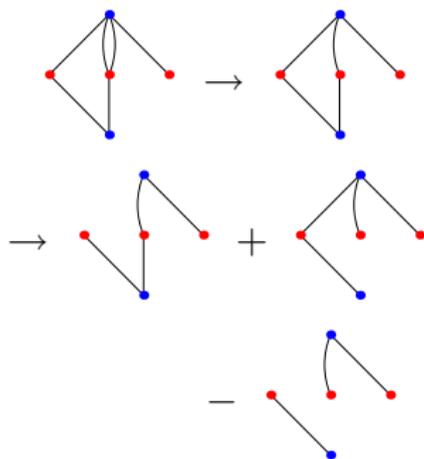
Illustration

Premier choix de boucles



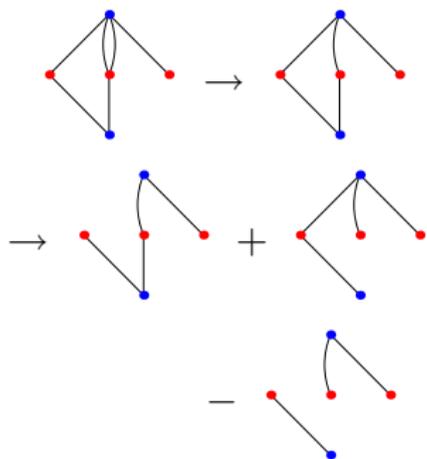
Illustration

Premier choix de boucles

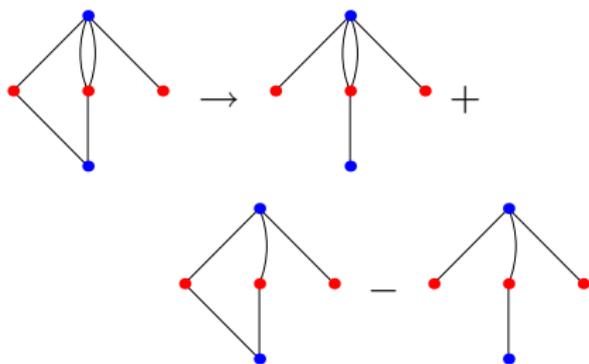


Illustration

Premier choix de boucles

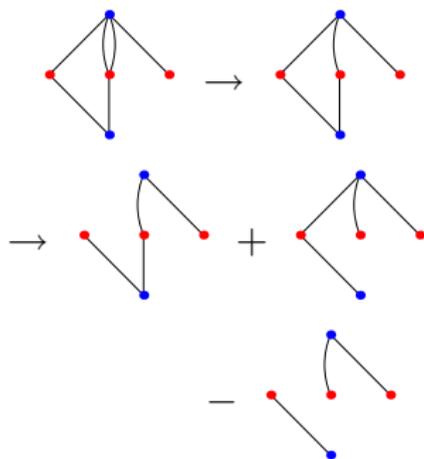


Second choix de boucles

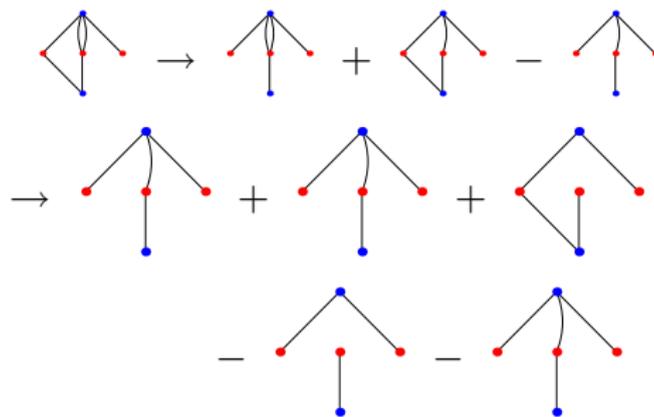


Illustration

Premier choix de boucles

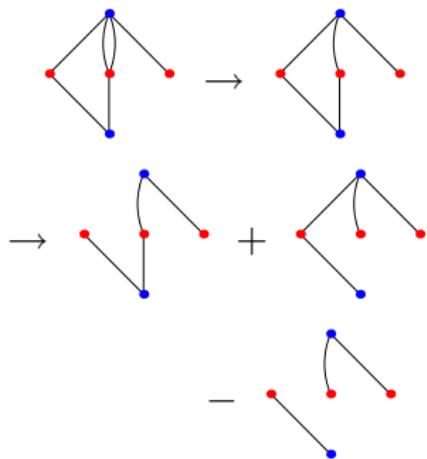


Second choix de boucles

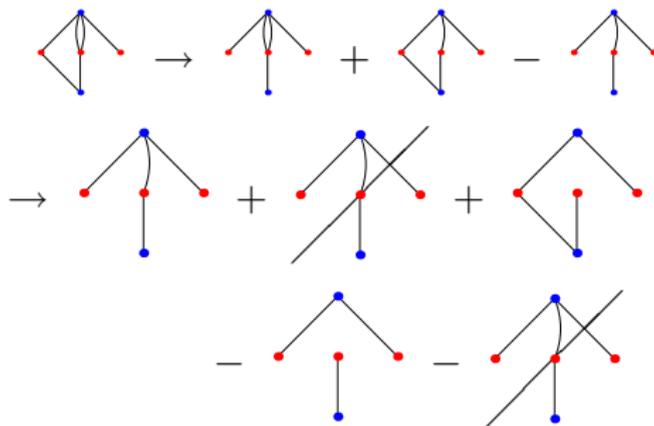


Illustration

Premier choix de boucles



Second choix de boucles



Énoncé précis

Définition

Soit $q : V_\bullet(G) \rightarrow \{2, 3, \dots\}$. Une q -forêt est une sous-forêt minimale de G telle que tout sommet bleu $n \in V_\bullet$ ait $q(n) - 1$ voisins.

Théorème (DFS 2008)

Après itération de nos transformations sur un graphe G , la somme des coefficients des q -forêts vaut :

- $(-1)^{|V_\bullet(G)| - \#c.c.(G)}$ si $\forall A \subset V_\bullet, |\text{Voisins}(A)| \geq \sum_{n \in A} (q(n) - 1)$

avec égalité ssi A est l'ensemble de sommets bleus d'une union de composantes connexes de G ,

- 0 sinon.

Déf : un graphe G vérifiant cette condition est dit q -admissible.

Comparaison avec le lemme des mariages de Hall

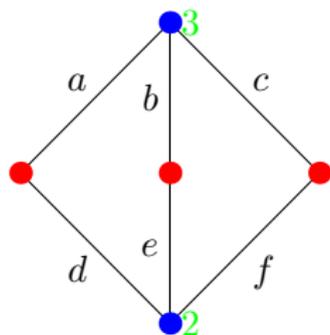
Théorème (Lemme des mariages, version polygame)

G contient une q -forêt

$$\iff \forall A \subset V, |\text{Voisins}(A)| \geq \sum_{n \in A} (q(n) - 1)$$

La q -admissibilité s'écrit de la même manière, mais avec des conditions précises d'égalité.

Équations de transport

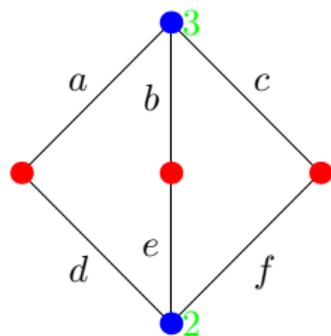


Graphe bicolore G muni
de $q : V_{\bullet} \rightarrow \{2, 3, \dots\}$

système associé \longrightarrow

$$(S_G^q) \begin{cases} x_a + x_b + x_c = 3 - 1 \\ x_d + x_e + x_f = 2 - 1 \\ x_a + x_d = 1 \\ x_b + x_e = 1 \\ x_c + x_f = 1 \end{cases}$$

Équations de transport



système associé (S_G^q)

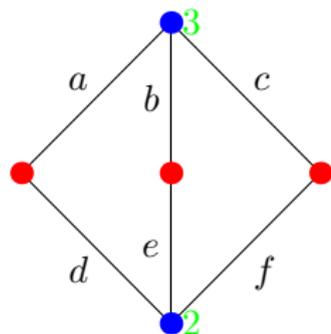
$$\begin{cases} x_a + x_b + x_c = 3 - 1 \\ x_d + x_e + x_f = 2 - 1 \\ x_a + x_d = 1 \\ x_b + x_e = 1 \\ x_c + x_f = 1 \end{cases}$$

Graphe bicolore G muni
de $q : V_{\bullet} \rightarrow \{2, 3, \dots\}$

Existence d'une q -forêt

\Leftrightarrow Existence d'une solution de (S_G^q) à valeurs dans $\{0; 1\}$.

Équations de transport



système associé (S_G^q)

$$\begin{cases} x_a + x_b + x_c = 3 - 1 \\ x_d + x_e + x_f = 2 - 1 \\ x_a + x_d = 1 \\ x_b + x_e = 1 \\ x_c + x_f = 1 \end{cases}$$

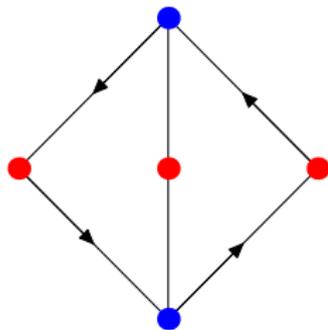
Graphe bicolore G muni
de $q : V_\bullet \rightarrow \{2, 3, \dots\}$

Proposition : G est q -admissible

\Leftrightarrow Existence d'une solution de (S_G^q) à valeurs dans $]0; 1]$.

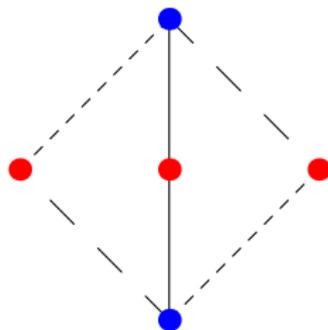
L'ensemble de ces solutions sera noté $\text{Sol}(G)$

Lien avec notre transformation



Un graphe bicolore G avec un cycle C orienté.

Lien avec notre transformation



Trois types d'arête :

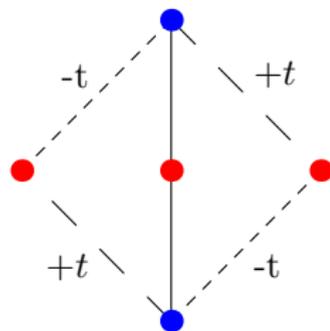
$e \in E \setminus C$ en trait plein

$e \in HE(C)$ (celles qu'on efface
dans la transformation) : petit
pointillé

$e \in C \setminus HE(C)$: grand pointillé

Lien avec notre transformation

Soit $(x_e)_{e \in E_G}$ une solution de (S_G^q) .



On définit (y_e) par

- $e \in E \setminus C : y_e = x_e$
- $e \in HE(C) : y_e = x_e - t$
- $e \in C \setminus HE(C) : y_e = x_e + t$

Alors $(y_e)_{e \in E_G}$ est solution de (S_G^q) .

Décomposition de $\text{Sol}(G)$

G graphe bicolore, C cycle orienté

$$\text{Sol}(G) = \bigsqcup_{A \subset HE(C)} \underbrace{\{(x_e) \in \mathbb{R}_{>0}^E \text{ sol de } (S_G^q) \text{ tel que } \arg \min_{e \in HE(C)} x_e = A\}}_{\text{Sol}_A(G)}$$

Décomposition de $\text{Sol}(G)$

G graphe bicolore, C cycle orienté

$$\text{Sol}(G) = \bigsqcup_{A \subset HE(C)} \underbrace{\{(x_e) \in \mathbb{R}_{>0}^E \text{ sol de } (S_G^q) \text{ tel que } \arg \min_{e \in HE(C)} x_e = A\}}_{\text{Sol}_A(G)}$$

Retirer leur valeur minimale aux $(x_e)_{e \in HE(C)}$ et l'ajouter aux $(x_e)_{e \in C \setminus HE(C)}$ définit une opération $\text{Sol}_A(G) \rightarrow \text{Sol}(G \setminus A)$.

En particulier, $\text{Sol}_A(G) \neq \emptyset \iff G \setminus A$ q -admissible.

Dans ce cas, $\dim(\text{Sol}_A(G)) = \dim(\text{Sol}(G \setminus A)) + 1$.

Caractéristique d'Euler

Grâce à cette décomposition en simplexes du simplexe $\text{Sol}(A)$

$$\chi(\text{Sol}(G)) = \sum_{A \subset \text{HE}(C)} \chi(\text{Sol}_A(G))$$

$$(-1)^{\dim(\text{Sol}(G))} \delta_{G \text{ q-adm}} = \sum_{A \subset \text{HE}(C)} (-1)^{\dim(\text{Sol}(G \setminus A)) + 1} \delta_{G \setminus A \text{ q-adm}}$$

Caractéristique d'Euler

Grâce à cette décomposition en simplexes du simplexe $\text{Sol}(A)$

$$\chi(\text{Sol}(G)) = \sum_{A \in \text{HE}(C)} \chi(\text{Sol}_A(G))$$

$$(-1)^{\dim(\text{Sol}(G))} \delta_{G \text{ q-adm}} = \sum_{A \in \text{HE}(C)} (-1)^{\dim(\text{Sol}(G \setminus A)) + 1} \delta_{G \setminus A \text{ q-adm}}$$

Les dimensions sont faciles à calculer. On obtient :

Théorème

Le nombre de graphes q -admissibles comptés avec la multiplicité $(-1)^{\# \text{ comp. connexes}}$ est invariant par nos transformations.

→ implique immédiatement le résultat annoncé.

Caractères irréductibles centraux du groupe symétrique

- irrep de $S_n \iff$ partitions λ de n .
- $\chi^\lambda(\mu)$: valeur du caractère de la représentation indexée par λ sur une permutation de type μ

Caractères irréductibles centraux du groupe symétrique

- irrep de $S_n \iff$ partitions λ de n .
- $\chi^\lambda(\mu)$: valeur du caractère de la représentation indexée par λ sur une permutation de type μ
- On la renormalise et on la regarde comme une fonction de λ (si $|\lambda| \leq |\mu|$, on complète μ avec des parts égales à 1) :

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \underbrace{n(n-1)\dots(n-|\mu|+1)}_{|\mu| \text{ termes}} \frac{\chi^\lambda(\mu 1^{|\lambda|-|\mu|})}{\chi^\lambda(\text{Id}_{|\lambda|})}$$

Caractères irréductibles centraux du groupe symétrique

- irrep de $S_n \iff$ partitions λ de n .
- $\chi^\lambda(\mu)$: valeur du caractère de la représentation indexée par λ sur une permutation de type μ
- On la renormalise et on la regarde comme une fonction de λ (si $|\lambda| \leq |\mu|$, on complète μ avec des parts égales à 1) :

$$\Sigma_\mu(\lambda) = \underbrace{n(n-1)\dots(n-|\mu|+1)}_{|\mu| \text{ termes}} \frac{\chi^\lambda(\mu 1^{|\lambda|-|\mu|})}{\chi^\lambda(\text{Id}_{|\lambda|})}$$

- On cherche à l'exprimer à partir d'autres fonctions (*observables*) sur les partitions.

Polynômes de Kerov

Observables intéressantes (qui jouent un rôle asymptotique) :

les cumulants libres $(R_i(\lambda))_{i \geq 2}$.

Théorème (Kerov 2000, publié par Biane)

Il existe un polynôme K_k , appelé k -ième polynôme de Kerov tel que :

$$\forall \lambda, \Sigma_k(\lambda) = K_k(R_2(\lambda), R_3(\lambda), \dots)$$

Polynômes de Kerov

Observables intéressantes (qui jouent un rôle asymptotique) :

les cumulants libres $(R_i(\lambda))_{i \geq 2}$.

Théorème (Kerov 2000, publié par Biane)

Il existe un polynôme K_k , appelé k -ième polynôme de Kerov tel que :

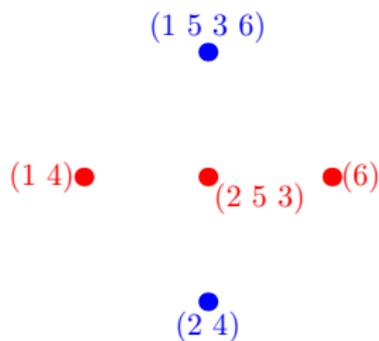
$$\forall \lambda, \Sigma_k(\lambda) = K_k(R_2(\lambda), R_3(\lambda), \dots)$$

Conjecture (Kerov 2000, publiée par Biane)

Les coefficients de K_k sont positifs.

Graphe bicolore associé à une paire de permutations

Définition par l'exemple $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.

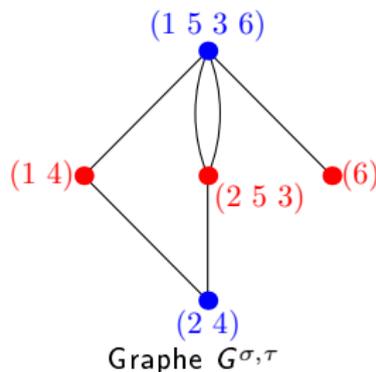


$$V_{\bullet} \simeq C(\sigma) \quad (1)$$

$$V_{\bullet} \simeq C(\tau) \quad (2)$$

Graphe bicolore associé à une paire de permutations

Définition par l'exemple $\sigma = (1536)(24)$; $\tau = (14)(253)(6)$.



d'arêtes entre $c_1 \in C(\sigma)$ et $c_2 \in C(\tau) = |c_1 \cap c_2|$

Formules pour les caractères et les cumulants

Théorème (Stanley, F., Śniady 2007)

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_k \\ \sigma \circ \tau = (1 \dots k)}} \pm N(G^{\sigma, \tau}); \quad (1)$$

$$R_{k+1} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathcal{S}_k \\ \sigma \circ \tau = (1 \dots k) \\ G^{\sigma, \tau} \text{ arbre}}} \pm N(G^{\sigma, \tau}), \quad (2)$$

où N associée à un graphe bicolore une fonction sur les partitions et est laissée **invariante** par nos transformations.

Lien avec la première partie

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \swarrow & & \searrow (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_A\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_B\right)
 \end{array}$$

(1) polynôme de Kerov

(2 – 3) formules du slide précédent pour Σ_k et R_{k+1}

(4) on itère nos transformations qui laissent N invariant

Lien avec la première partie

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \swarrow & & \searrow (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_A\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_B\right)
 \end{array}$$

Les $N(F)$ ne sont pas linéairement indépendants.
 Donc, en général, $A \neq B$.

Lien avec la première partie

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \swarrow & & \searrow (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_A\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_B\right)
 \end{array}$$

Les $N(F)$ ne sont pas linéairement indépendants.
 Donc, en général, $A \neq B$.

Boîte noire

Si on choisit bien les cycles pour obtenir (4), alors
 $A = B$.

Lien avec la première partie

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \parallel & & \parallel (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_A\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_B\right)
 \end{array}$$

Si on regarde les forêts minimales,

$$\prod_i R_{\nu_i} = N(F_\nu) + N\left(\begin{array}{l} \text{forêts non} \\ \text{minimales} \end{array}\right)$$

Lien avec la première partie

$$\begin{array}{ccc}
 & \Sigma_k & \\
 (1) \parallel & & \parallel (2) \\
 \sum \pm \prod R_{j_i} & & \sum_{\sigma, \tau, \dots} \pm N(G^{\sigma, \tau}) \\
 \parallel (3) & & \parallel (4) \\
 N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_A\right) & & N\left(\underbrace{\sum_{F \text{ forêts}} \pm F}_B\right)
 \end{array}$$

Si on regarde les forêts minimales,

$$\prod_i R_{\nu_i} = N(F_\nu) + N\left(\begin{array}{l} \text{forêts non} \\ \text{minimales} \end{array}\right)$$

On en déduit :

$$\left[\prod_i R_{\nu_i} \right] K_k = [F_\nu]A = [F_\nu]B.$$

2^e égalité : $A = B$ avec un bon choix de cycles, mais $[F_\nu]B$ ne dépend pas de ce choix.

Notre résultat

Théorème

Le coefficient de $R_2^{s_2} R_3^{s_3} \dots$ dans K_k est égal au nombre de triplet (σ, τ, q) tels que :

- $\sigma \circ \tau = (1 \dots k)$;
- $|C(\sigma)| = s_2 + s_3 + \dots$;
- $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + \dots$;
- $q : C(\sigma) \rightarrow \{2, 3, \dots\}$ vérifie $q^{-1}(i) = s_i - 1$;
- $G^{\sigma, \tau}$ est q -admissible.

Les coefficients de K_k comptent des factorisations (colorées) dans S_k !

Et la suite...

- Autres résultats valable pour tout choix de boucles ? Pas de conjectures pour l'instant...
- Par contre, si G a une structure de cartes, il y a un choix de boucles intéressants. Calcul des coefficients des forêts ?
- Dénombrement des triplets *admissibles*... Peut-on obtenir une série génératrice ? Des résultats sur la forme des coefficients (polynômes en telles variables, etc...) ?
- Les relations utilisées ici sont-elles les seules pour les N ? Si oui, $N(A) = N(B) \Rightarrow [F_\nu]A = [F_\nu]B$ et on n'aurait plus besoin de la boîte noire...

Merci

Merci pour votre attention !

Des questions ?