Diplôme :

Epreuve : ~~Correction~~ exercices

Date : ALÉA 2023

Sujet de : Logique et permutations

Groupe :

Nombre de copies utilisées :

Nom :

Prénoms :

Né(e) le :

N° Étudiant

Partie à rabattre

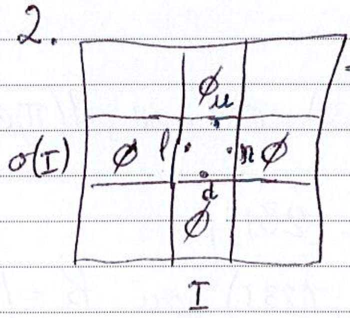
	Note de 0 à 20	APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE CHIFFRÉE
Ne pas écrire dans cette marge		

Exercice 4.1.

1. $\exists x, t : (\neg \exists y : y <_p x) \wedge (\neg \exists y : x <_p y <_p t) \wedge (x >_v t)$

(formule exprimant $\sigma(1) > \sigma(2)$)

2.



$$\neg \Big[\exists\, l \neq r, u \neq d : (d \leq_v l, r \leq_v u) \wedge (l \leq_p d, u <_p r) \wedge \forall x \big((d <_v x <_v u) \Leftrightarrow (l <_p x <_p r) \big) \wedge \exists x : (x <_v d) \vee (x >_v u) \Big]$$

(formule exprimant « σ simple »)

3. Si $n \geq 2^k - 1$, la stratégie suivante est gagnante pour Duplicator. Au round l, si Spoiler joue à distance $\leq 2^{k-l} - 1$ du bord ou d'un point déjà joué, Duplicator joue à même distance du bord/point correspondant dans l'autre permutation. Sinon, il joue dans l'intervalle correspondant à distance $\geq 2^{k-l}$ des bords et points déjà joués. On montre facilement par récurrence qu'après le l-ième coup, les intervalles correspondant dans les deux permutations ont soit la même longueur, soit tous

[redacted]

deux longueurs $\geq 2^{k-l}-1$. En particulier, un intervalle ~~est vide~~ entre des points déjà joués est vide dans une permutation si et seulement si l'intervalle correspondant est vide dans l'autre permutation ce qui permet à Duplicator de maintenir l'isomorphisme partiel à tous les coups.

Supposons que "σ a un point fixe" est expressible par une formule de profondeur k. Posons $n = 2^k - 1$. Alors $\omega_n \equiv_k \omega_{n+1}$ car Dupl. a une stratégie gagnante pour $EF(\omega_n, \omega_{n+1}, k)$. Donc ω_n et ω_{n+1} vérifient les mêmes formules de profondeur k. Impossible car ω_n a un point fixe, mais pas ω_{n+1}.

Exercice 4.2.

1. $$\mathbb{P}(\tau_n = \pi) = \frac{\#\{\sigma \in Av_n(231) : \sigma \text{ s'écrit } H(\pi, e) \text{ pr un certain } e\}}{|Av_n(231)|}$$

Or e doit être ds $Av_{n-k-1}(231)$ où $k = |\pi|$

$$\rightarrow \mathbb{P}(\tau_n = \pi) = \frac{|Av_{n-k-1}(231)|}{|Av_n(231)|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4^{-k-1}$$

De même $\mathbb{P}(e_n = \pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4^{-k-1}$

2. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des ss-ens finis de $Av(231)$

Les évènement $\tau_n \in \mathcal{F}$ et $e_n \in \mathcal{F}'$ sont disjoints

pr $n > 1 + \max_{\tau \in \mathcal{F}} |\tau| + \max_{e \in \mathcal{F}'} |e|$

donc $\mathbb{P}\left(\tau_n \in \mathcal{F} \vee e_n \in \mathcal{F}'\right)$

$$= \sum_{\pi \in \mathcal{F}} \mathbb{P}(\tau_n = \pi) + \sum_{\pi \in \mathcal{F}'} \mathbb{P}(e_n = \pi)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(|\mathcal{F}_k| + |\mathcal{F}'_k| \right) 4^{-k-1}$$

où $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap Av_k(231)$

$0 \leq |\mathcal{F}_k| + |\mathcal{F}'_k| \leq 2\, Cat_k$

De plus $\forall\, \mathcal{F}, \mathcal{F}'$, $\tau \in \mathcal{F} \vee e \in \mathcal{F}'$ est une formule du 1^er ordre

Donc $\left\{ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(\sigma_n \models \varphi),\ \varphi \text{ prop du 1}^{\text{er}} \text{ ordre} \right\}$

$$\supseteq \left\{ \sum_{k=0}^{K} a_k 4^{-k-1} ;\ (a_k)_{k \leq K} \text{ suite finie avec } 0 \leq a_k \leq 2 Cat_k \right\}$$

En particulier l'adhérence est $[0;1]$ tout entier.

Exercice 4.3

1 $\mathbb{E}[X_{n,k}] = \sum_{j=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(\{j, j+1, j+2\} \in \sigma_n(I^*)\right)$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}} \sim n \frac{k^3}{n^3} = k^3 n^{-2}$$

$$\mathrm{Var}(X_{n,k}) = \sum_{1 \leq j, j' \leq n-2} \mathrm{Cov}\left(\mathbb{1}[\{j, j+1, j+2\} \in \sigma_n(I^*)], \mathbb{1}[\{j', j'+1, j'+2\} \in \sigma_n(I^*)] \right)$$

- termes $j = j'$: * $n-2$ tels termes

  * $\mathrm{Cov}[\ldots] = \frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}} \left(1 - \frac{\binom{k}{3}}{\binom{n}{3}} \right) \sim \frac{k^3}{n^3}$

  Contribution totale : $k^3 n^{-2}$

• termes $|j-j'| = 1$: * $2(n-3)$ tels termes

* $\mathrm{Cov}[\ldots] = \dfrac{\binom{k}{4}}{\binom{n}{4}} - \dfrac{\binom{k}{3}^2}{\binom{n}{3}^2} \sim \dfrac{k^4}{n^4}$

Contribution totale : $2k^4 n^{-3} \ll k^3 n^{-2}$

• termes $|j-j'| = 2$: $2(n-4)$ tels termes

* $\mathrm{Cov}[\ldots] = \dfrac{\binom{k}{5}}{\binom{n}{5}} - \dfrac{\binom{k}{3}^2}{\binom{n}{3}^2} \sim \dfrac{k^5}{n^5}$

contribution totale : $2k^5 n^{-4} \ll k^3 n^{-2}$

• termes $|j-j'| > 2$: $n^2 - O(n)$ tels termes

* $\mathrm{Cov}[\ldots] = \dfrac{\binom{k}{6}}{\binom{n}{6}} - \dfrac{\binom{k}{3}^2}{\binom{n}{3}^2} \simeq \dfrac{k^5}{n^6}$

contribution totale : $\Theta(k^5 n^{-4}) \ll k^3 n^{-2}$

Finalement : $\mathrm{Var}[X_{n,k}] \sim k^3 n^{-2}$

2. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebishev.

Pour $k = \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\log\log n\right)^{1/3} n^{2/3} \right\rfloor$ $\mathbb{E}[X_{n,k}] \sim \mathrm{Var}(X_{n,k}) \sim \frac{3}{2}\log\log n$

$$\mathbb{P}\left[\left|X_{n,k} - \mathbb{E}[X_{n,k}]\right| \geq \frac{1}{2}\log\log n\right] \leq \frac{\mathrm{Var}(X_{n,k})}{\left(\frac{1}{2}\log\log n\right)^2} \to 0$$

∎