Séminaire Chevalley
7 nov. 2013

Éléments de Jucys-Murphy et polynômes de Jack

Introduction

caractères irréductibles de S_n $\quad \chi^\lambda_\mu$ (indexés par 2 partitions de n) $\quad \xleftrightarrow[\text{Frobenius}]{\text{form. de}} \quad$ fonctions de Schur s_λ

question très générale → Peut-on généraliser les prop. des caractères ? (ex: formule de Pieri, int en termes de f$^{\text{ct}}$s de tableaux semi-std)

généralisations : poly de Jack / Macdonald

Plus précisément, je cherche à généraliser "approche duale".

qu'est-ce que l'"approche duale" ?

$$Ch_\mu(\lambda) := \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\dfrac{\chi^\lambda(\mu 1^{n-k})}{\dim \lambda} & \text{si } |\lambda| \geq |\mu| \quad (n := |\lambda|,\ k := |\mu|) \\ 0 & \text{si } |\lambda| < |\mu|. \end{cases}$$

étudier Ch_μ comme une fonction de λ (μ fixé).

2 prop importantes de Ch_μ :

* fonctions sym décalées (sym. en $\lambda_1 - 1, \dots, \lambda_n - n+1$)
  [Kerov, Olshanski] → étudiées par Okounkov, Olshanski.
  se généralise au cas "Jack" [Lassalle]
  ⚠ pas un simple chgt de variable p^{rt} aux f$^{\text{ct}}$ sym
* expression combinatoire en terme de cartes [F., Dołęga, Śniady]
  ↳ gén. conjecturale (vague) au cadre "Jack". [Lassalle, F., Dołęga, Śniady]

· Ici, on regarde un pb légèrement différent…

Soit $J_i := (1\ i) + (2\ i) + \dots (i{-}1\ i) \in \mathbb{C}[S_n]$

On veut calculer $h_k(J_1, J_2, \dots, J_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n} J_{i_1} \cdots J_{i_k}$

coef d'une perm σ donné ?

(0)

→ motivation et lien avec pb précédent un peu plus tard.

* on va donner des relations de récurrence
* on va regarder une généralisation au contexte "Jack"

→ conjecture précise

cas $\alpha = 2$ bien compris

I Présentation du problème, motivations, reformulation avec fonctions sym,

II Une formule de récurrence : approche combinatoire, approche fonctions symétrique.

III Généralisation du pb au cas "Jack", cas $\alpha = 2$, conjecture générale.

I A- Présentation du problème

Rappel $J_i := \sum_{j<i} (j\ i) \in \mathbb{C}[S_n]$

Propriétés : • J_i commute avec $\mathbb{C}[S_{i-1}]$

$\Rightarrow$ les J_i commutent entre eux.

• $e_k(J_1, \dots, J_n) = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \text{ à } n-k \text{ cycles}}} \sigma$

Conséquence : si F est une fonction sym,

$$F(J_1, \dots, J_n) \in Z(\mathbb{C}[S_n])$$

i.e. il existe $a_F(\mu)$ t.q.

$$F(J_1, \dots, J_n) = \sum_{\mu \vdash n} a_F(\mu)\ K_\mu .$$

somme des perm. de type μ

Exemple : $p_1(J_1, \dots, J_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} (j\ i) = K_{(2\,1^{n-2})}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{p_1}((2\,1^{n-2})) = 1 \\ a_{p_1}(\mu) = 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$p_2(J_1, \dots, J_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j_1, j_2 < i} \underbrace{(j_1\ i)(j_2\ i)}_{\substack{(i\ j_2\ j_1) \text{ si } j_1 \neq j_2 \\ id \text{ si } j_1 = j_2}} = K_{(3\,1^{n-3})} + \frac{n(n-1)}{2} K_{(1^n)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{p_2}((3\,1^{n-3})) = 1 \\ a_{p_2}(1^n) = \frac{n(n-1)}{2} \\ a_{p_2}(\mu) = 0 \end{cases}$$

$$p_{(1,1)}(J_1, \dots, J_n) = p_1(J_1, \dots, J_n)^2 = \sum_{\substack{j_1 < i_1 \\ j_2 < i_2}} (j_1, i_1)(j_2, i_2) = 2 K_{(2,2,1^{n-4})} + 4 K_{(3,1^{n-3})} + \frac{n(n-1)}{2} K_{(1^n)}$$

Problème général : Calculer $a_F(\mu)$

Observation :

on a envie de définir

Cl_μ suite d'éléments dt n-ième terme est ds $Z(\mathbb{C}[S_n])$

$$\begin{cases} Cl_{(2)} := K_{(2\,1^{n-2})}, \quad Cl_{(3)} := K_{(3\,1^{n-3})}, \quad Cl_{(2,2)} := K_{(2,2,1^{n-4})} \\ Cl_\emptyset := K_{(1^n)}, \quad Cl_{(1^2)} = \frac{n(n-1)}{2} K_{(1^n)} \\ Cl_{(\nu 1^r)} = \binom{n-|\nu|}{r} K_{(\nu 1^{n-|\nu|})} \end{cases}$$

← on choisit 2 pts fixes ps on complète par des points fixes

On peut montrer:

ne dépend pas de n

$$\Rightarrow \quad n^a p_\mu(J_1,\dots,J_n) = \left(\prod m_i(\mu)!\right)\cdot Cl_{(\mu_1+1,\dots,\mu_\ell+1, 1^a)} + \sum_{|\nu|<|\mu|+\ell(\mu)+a} b_\nu^{\mu,a}\, Cl_\nu$$

syst d'équation triangulaire !

on peut inverser

$$Cl_\mu = \left(G_\mu(J_1,\dots,J_n)\right)_{n\geq 1} \quad \text{avec } G_\mu \in Sym(\mathbb{C}[n])$$

B- Motivation

1. 3^e prop des élts JM :

Il existe une base $(v_T)_{T \text{ tableaux standard de forme } \lambda}$ de la rep irréd (V_λ) de S_n tel que

$$J_i \cdot v_T = c_i(T)\, v_T$$

"content" de la case i du tableau

i.e. $j - i$

j : indice de colonne, i : indice de ligne

Conséquence: si F sym,

$$e^\lambda\left(F(J_1,\dots,J_n)\right) = F(\mathcal{C}_\lambda)\cdot Id_{V_\lambda}$$

$\mathcal{C}_\lambda$: multi-ensemble des "contents" de λ.

Observation: Comme $e^\lambda(K_{\mu 1^{n-r}}) = |K_{\mu 1^{n-r}}| \frac{\chi^\lambda(\mu 1^{n-r})}{\dim \lambda} \mathrm{id}_{V_\lambda}$

$$e^\lambda(Cl_\mu) = \frac{Ch_\mu(\lambda)}{z_\mu} \mathrm{id}_{V_\lambda}$$

détermine $a_F(\mu)$
$\Rightarrow$ c'est une formule équivalente du pb!

$$\Rightarrow \frac{Ch_\mu(\lambda)}{z_\mu} = G_\mu(\mathscr{C}_\lambda), \quad F(\mathscr{C}_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} a_F(\mu) |K_\mu| \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda}$$

autre description des fonctions sym shiftés (facile de voir que $\sum_{D \in \lambda} C_{D}^{k}$ décalée sym)

* prouve que Ch_μ est sym décalée.

* si on sait calculer G_μ (i.e. calculer $a_{p_k}(\mu)$), + inv matrice
on a une formule du caractère
(pratique pour l'asymptotique)

2. Cas $F = p_k$: lié aux opérateurs vertex (Lascoux, Thibon)
aux factorisations en étoile (Pak, Rattan, Irving, Goulden, Jackson)
$\rightarrow$ pas de détails ici.

3. Cas $F = h_k$: lien avec intégrales de matrices

$$(-1)^{|\mu|} N^n \int_{U_N} u_{11} \overline{u_{1\pi(1)}} \cdots u_{n,n} \overline{u_{n\pi(n)}} \, dU = \sum_{k \geq 0} \frac{a_{h_k}(\mu)}{N^k}$$

$\mu =$ type-cyclique(π)

$\pi \in S_n$, $n \leq N$
toute int de poly en les entrées (et leur conj.) se ramènent à ce cas

Série cv au moins pr $N \geq n^2$..
$|a_{h_k}(\mu)| \leq n^{2k}$

$\Rightarrow a_k(\mu) := a_{h_k}(\mu)$ pr simplifier les notations
(on va regarder principalement ce cas).

II. Une formule de récurrence

A- Approche combinatoire

garder au tableau!

Proposition : $k \geq 2$, $m \geq 1$, e partition qcque $\ell(e)$

$$a_k(e \cup (m)) = \delta_{m,1}\, a_k(e) + \sum_{j=1}^{\ell(e)} e_j \cdot a_{k-1}(e \setminus e_i \cup (e_i+m)) + \sum_{\substack{r+s=m \\ r,s \geq 1}} a_{k-1}(e \cup (r,s)). \quad (RS)$$

Proof: on part de $h_k(J_1, \dots, J_{n+1}) = h_k(J_1, \dots, J_n) + \underbrace{J_{n+1}}_{\sum_{j<n+1} (j\ n+1)} h_k(J_1, \dots, J_{n+1})$

on choisit n tq $|e \cup (m)| = n+1$

et $\sigma \in S_{n+1}$ de type $e \cup (m)$

avec $n+1$ ds un cycle de taille m.

$[\sigma]\, h_k(J_1, \dots, J_{n+1}) = a_k(e \cup (m))$ par déf.

$[\sigma]\, h_k(J_1, \dots, J_n) = \delta_{m,1}\, a_k(e)$

ne contient que des perm. qui fixent $n+1$.

$[\sigma]\, (i\ n+1)\, h_k(J_1, \dots, J_{n+1}) = [\sigma\, (j\ n+1)]\, h_k(J_1, \dots, J_{n+1})$

$= a_k(\text{type-cyclique}(\sigma\,(i\ n+1)))$

- si $(\underbrace{j \dots}_{r}\ \underbrace{n+1 \dots}_{s})$ est un cycle de σ alors $\sigma\,(i\ n+1)$ type $e \cup (r,s)$
- si j ds un cycle de longueur e_i alors $\sigma\,(i\ n+1)$ type $e \setminus e_i \cup (e_i+m)$.

on resomme et on obtient la formule ∎

Remark: surdétermine les $a_k(e)$ (vient du fait que l'on sait a priori que $h_k(J_1, \dots, J_{n+1}) \in Z(\mathbb{C}[S_{n+1}])$ $\Rightarrow$ on peut choisir σ)

Corollaire : $k \geqslant 2$, τ partition $\cancel{(1 \leq i \leq \ell(\tau))}$

(RC)
$$\sum_{i=1}^{\ell(\tau)} \tau_i \, a_k\big(\underbrace{\tau \setminus (\tau_i)}_{e} \cup \underbrace{(\tau_i + 1)}_{m}\big) = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq \ell(\tau) \\ j \neq i}} \tau_i \tau_j \cdot a_{k-1}\big(\tau \setminus (\tau_i, \tau_j) \cup (\tau_i + \tau_j + 1)\big)$$
$$+ \sum_{1 \leq i \leq \ell(\tau)} \tau_i \sum_{\substack{r+s = \tau_i + 1 \\ r,s \geqslant 1}} a_{k-1}\big(\tau \setminus (\tau_i) \cup (r,s)\big)$$

Remark : * avec cas $m = 1$ de la prop.,

(R1)
$$a_k(\tau \cup (1)) = a_k(\tau) + \sum_{j=1}^{\ell(\tau)} \tau_j \, a_{k-1}(\tau \setminus \tau_i \cup (\tau_i + 1))$$

cela détermine uniquement les $a_k(e)$

↑ regarder la plus petite part de e.

* (RC) peut être prouvé directement en regardant les coefs de σ ds

$$P_{\mathbb{C}[S_n]}\big(h_k(J_1, \dots, J_{n+1})\big) = h_k(J_1, \dots, J_n) + P_{\mathbb{C}[S_n]}\big(J_{n+1} h_k(J_1, \dots, J_{n+1})\big)$$

Note : tous les élts st ds centre de $\mathbb{C}[S_n]$.

B- Approche "fonction symétrique"

[Lassalle]

Rappel : $$h_k(\mathscr{C}_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} a_k(\mu) \frac{Ch_\mu(\lambda)}{z_\mu}$$

On peut partir de là pour montrer (R1) et (RC)

esquisse de preuve :

. $\overline{m}$ départ : Soit $\lambda' \nearrow \lambda$

$$h_k(\mathscr{C}_{\lambda'}) = h_k(\mathscr{C}_\lambda) + c(\lambda' \setminus \lambda) \cdot h_{k-1}(\mathscr{C}_{\lambda'})$$

$$\Rightarrow \sum_{\mu \vdash n} a_k(\mu) \sum_{\lambda'} \frac{\dim \lambda'}{(\dim \lambda)(n+1)} \cdot c(\lambda' \setminus \lambda) \frac{Ch_\mu(\lambda')}{z_\mu} = \sum_{\mu \vdash n} a_k(\mu) \frac{Ch_\mu(\lambda)}{z_\mu} \sum_{\lambda'} \frac{\dim \lambda'}{(n+1) \dim \lambda} c(\lambda' \setminus \lambda)^2 \cdot \sum_{\mu \vdash n} a_{k-1} \frac{Ch_\mu(\lambda')}{z_\mu}$$

Lemme : $\displaystyle\sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \frac{\dim\lambda'}{(n+1)\dim\lambda}\, Ch_\mu(\lambda') = m_1(\mu)\cdot Ch_{\mu\setminus 1}(\lambda) + Ch_\mu(\lambda)$

$$\sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \frac{\dim\lambda'}{(n+1)\dim\lambda}\, c(\lambda'\setminus\lambda)\, Ch_\mu(\lambda') = \sum_{r\geq 2} r\, m_r(\mu)\, Ch_{\mu\setminus(r)\cup(r-1)}(\lambda)$$

$$\sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \frac{\dim\lambda'}{(n+1)\dim\lambda}\, c(\lambda'\setminus\lambda)^2\, Ch_\mu(\lambda') = \ldots$$

Les $Ch_\mu(\lambda)$ sont indépendants

on trouve (R1)....

Pour trouver (RC), il faut multiplier par $c(\lambda'\setminus\lambda)$ (en vert)

Esquisse de preuve pr le lemme :

utiliser l'opérateur

$$D_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \frac{x_i^2}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$D_2\, s_\lambda = \left(p_1(\mathcal{C}_\lambda) + |\lambda|(N-1)\right) s_\lambda$$

$$\left(D_2 p_1 - p_1 D_2\right) s_\lambda = \sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \left(p_1(\mathcal{C}_{\lambda'}) - |\lambda'|(N-1) - p_1(\mathcal{C}_\lambda) + |\lambda|(N-1)\right) s_{\lambda'}$$

$$= \sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \left(c(\lambda'\setminus\lambda) + (N-1)\right) s_{\lambda'}$$

on écrit sur les fct^{os} puissances

$$\sum \chi^\lambda_\mu \underbrace{\left(D_2 p_1 - p_1 D_2\right) p_\mu}_{} = \sum_{\lambda'\nwarrow\lambda} \left(c(\lambda'\setminus\lambda) + (N-1)\right) \chi^{\lambda'}_\mu\, p_\mu$$

calculer ça : $\displaystyle\sum_{r\geq 1} r\, m_r(\mu)\, p_{\mu\setminus(r)\cup(r+1)} - (N-1)\, p_{\mu\cup(1)}$

on met $N=1$ (poly en N des 2 côtés) et on compare les coefs de p_μ ...

III Généralisation

A - Énoncé du pb général

- "α - content" : $\alpha(j-1) - (i-1)$ $\Rightarrow$ multi-ensemble noté $\mathcal{C}_\lambda^{(\alpha)}$

-1	$\alpha-1$	
0	α	2α

- Jack polynomials $J_\lambda^{(\alpha)}$

deformation of Schur functions $J_\lambda^{(1)} = \frac{n!}{\dim \lambda} s_\lambda$

expand on power-sum basis $J_\lambda^{(\alpha)} = \sum_{\mu \vdash n} \theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda)\, p_\mu$

Lemme : $\left(\lambda \mapsto \theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda)\right)_{\mu \vdash n}$ is a basis of $\mathcal{F}(\mathcal{Y}_n, \mathbb{C})$

partitions de n.

$\Rightarrow \exists !\ a_F^{(\alpha)}(\mu)$ tq $\forall \lambda$, $F\left(\mathcal{C}_\lambda^{(\alpha)}\right) = \sum_{\mu \vdash n} a_F^{(\alpha)}(\mu)\, \theta_\mu^{(\alpha)}(\lambda)$

pour $\alpha = 1$, $\mathcal{C}_\lambda^{(1)} = \mathcal{C}_\lambda$

$$F(\mathcal{C}_\lambda) = \sum_{\mu \vdash n} a_F^{(1)}(\mu) \frac{n!}{\dim \lambda} \frac{\chi_\mu^\lambda}{z_\mu} \Rightarrow a_F^{(1)}(\mu) = a_F(\mu)$$

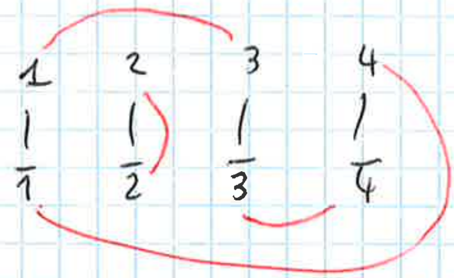
Problème : calculer $a_F^{(\alpha)}(\mu)$.

$\rightarrow$ les équations (RC) et (RI) s'étendent facilement (méthode de Lassalle)

conj. : $a_k^{(\alpha)}(e \cup (m)) = \sum_{\substack{r+s=m \\ r,s \geq 1}} a_{k-1}^{(\alpha)}(e \cup (r,s)) + \alpha \sum_{1 \leq i \leq \ell(e)} e_i\, a_{k-1}^{(\alpha)}(e \setminus e_i \cup (e_i+m))$
$+ (\alpha-1)\cdot(m-1)\, a_{k-1}^{(\alpha)}(e \cup (m))$

- Explication combi ?
- Avec fct^{os} sym ? dur car "pas ds centre du groupe"

B - Cas $\alpha = 2$

$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$\mathbb{C}[S_n]$	$\mathbb{C}[S_{2n}]$ ← agissant sur $\{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \dots\}$
$Z(\mathbb{C}[S_n])$	$\mathbb{C}[H_n \backslash S_{2n} / H_n]$ (commutatif) ← $H_n = \{\sigma : \sigma(\bar{i}) = \overline{\sigma(i)}\}$; $= \{x \in \mathbb{C}[S_{2n}] : h\,x\,h' = x \ \forall h, h' \in H_n\}$
base $K_\mu = \sum_{\sigma \text{ type cyclique } \mu} \sigma$	base $K_\mu^{(2)} := \sum_{\sigma \text{ coset-type } \mu} \sigma$
	ex: $\begin{pmatrix} 1 & \bar{1} & 2 & \bar{2} & 3 & \bar{3} & 4 & \bar{4} \\ 3 & 1 & 4 & \bar{3} & 2 & \bar{2} & 4 & \bar{1} \end{pmatrix}$  coset-type $= (3,1)$
$\chi^\lambda_\mu / \dim \lambda$	ω^λ_μ fct° sphérique zonale $= * \, [p_\mu] \, J_\lambda^{(2)}$
$J_i = (1\ i) + \dots + (i-1\ i)$	$J_i^{(2)} := (1\ i) + (\bar{1}\ i) + \dots + (i-1\ i) + (\overline{i-1}\ i)$
$e_k(J_1, \dots, J_n) = \sum_{\sigma \text{ à } n-k \text{ cycles}} \sigma$	$e_k(J_1^{(2)}, \dots, J_n^{(2)}) \left(\frac{1}{\lvert H_n \rvert} \sum_{h \in H_n} h \right) = \sum_{\sigma \text{ à } n-k \text{ "coset-cycles"}} \sigma$
$h_k(J_1, \dots, J_n) = \sum_{\mu \vdash n} a_k^{(1)}(\mu) K_\mu$	$h_k(J_1^{(2)}, \dots, J_n^{(2)}) \left(\frac{1}{\lvert H_n \rvert} \sum_{h \in H_n} h \right) = \sum_{\mu \vdash n} a_k^{(2)}(\mu) K_\mu^{(2)}$
$(-1)^n N^n \int_U \dots \, dU = \sum_{k \geq 0} \frac{a^{(1)}_{h_k}(\mu)}{N^k}$	$\left(\int_O O_{1,3} O_{1,1} O_{2,4} O_{2,3} O_{3,2} O_{3,2} O_{4,4} O_{4,1} \right) (-1)^4 N^4 = \sum_{k \geq 0} a^{(2)}_{h_k}(\mu) / N^k$

Prop:

$$a_k^{(2)}(\ell \cup (m)) = \sum_{\substack{r+s=m \\ r,s \geq 1}} a_{k-1}^{(2)}(\ell \cup (r,s)) + 2 \sum_{1 \leq i \leq \ell(\ell)} \ell_i \, a_{k-1}^{(2)}(\ell \setminus \ell_i \cup (\ell_i + m)) + (m-1) \, a_{k-1}^{(2)}(\ell \cup (m))$$

correspond à "twister" le cycle...