Permutations aléatoires et sous-suites croissantes

Valentin Féray

CNRS, Université de Lorraine

Séminaire d'introduction à la recherche
Nancy, 21 janvier 2022

Plan de l'exposé

1. Présentation de mon domaine de recherches : les probabilités discrètes
2. Un problème particulier : sous-suite croissantes dans les permutations aléatoires uniformes ?
3. Une variante que j'ai étudié récemment : sous-suites croissantes dans les permutations séparables aléatoires.

Probabilités discrètes – Qu'est-ce que c'est ?

$\rightarrow$ l'étude d'objets combinatoires aléatoires.

Probabilités discrètes – Qu'est-ce que c'est ?

$\rightarrow$ l'étude d'objets combinatoires aléatoires.

Quels types d'objets ? Graphes, permutations, arbres, ...

Probabilités discrètes – Qu'est-ce que c'est ?

$\rightarrow$ l'étude d'objets combinatoires aléatoires.

Quels types d'objets ? Graphes, permutations, arbres, ...

Aléatoires ? Pour chaque taille n, on se donne une mesure de probabilités sur les objets de taille n (par exemple la mesure uniforme), et on s'intéresse à la limite n tend vers l'infini.

Probabilités discrètes – Qu'est-ce que c'est ?

$\rightarrow$ l'étude d'objets combinatoires aléatoires.

Quels types d'objets ? Graphes, permutations, arbres, ...

Aléatoires ? Pour chaque taille n, on se donne une mesure de probabilités sur les objets de taille n (par exemple la mesure uniforme), et on s'intéresse à la limite n tend vers l'infini.

Étude ?

- on peut regarder une "statistique", i.e. une fonction sur l'ensemble des objets combinatoires (nombre/longueur des cycles d'une permutation, nombre chromatique du graphe, hauteur de l'arbre, ...) ;
- on peut définir une notion de convergence pour les objets eux-même.

Probabilités discrètes – Exemples de résultats

Theorem (Goncharov, '44)

Soit $\kappa(\sigma_n)$ le nombre de cycles d'une permutation σ_n aléatoire uniforme. Alors $\frac{\kappa(\sigma_n) - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \to_d \mathcal{N}(0,1)$.

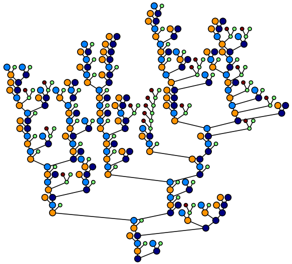
Theorem (Bollobas, '88)

Soit G_n un graphe aléatoire uniforme à n sommets et $\chi(G_n)$ son nombre chromatique. Alors $\chi(G_n) \sim_P \frac{n}{2\log_2(n)}$.

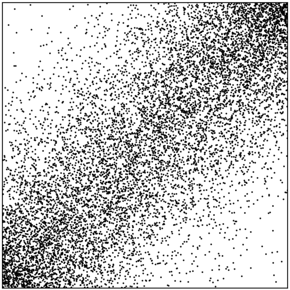
Theorem (Aldous, 91)

Soit T_n un arbre aléatoire à n sommets. On peut voir T_n comme un espace métrique (V_{T_n}, d_{T_n}). Alors $\frac{1}{\sqrt{n}} T_n$ tend en distribution (pour la topologie dite de Gromov–Hausdorff) vers un objet aléatoire $\mathcal{T}_\infty$, que l'on appelle "arbre continu Brownien".

Probabilités discrètes – Quelques images provenant de mes travaux (1/2)

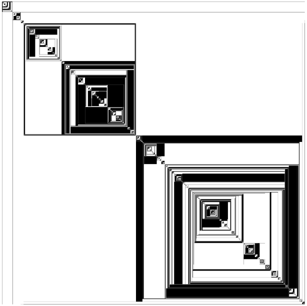


arbre aléatoire

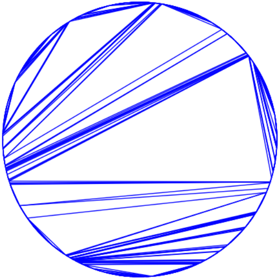


matrice d'une permutation aléatoire (non-uniforme)

Probabilités discrètes – Quelques images provenant de mes travaux (2/2)



matrice d'adjacence d'un "cographe" aléatoire



triangulation aléatoire

Probabilités discrètes – Motivations

en combinatoire Preuve probabiliste d'existence : si on prouve qu'un objet a une propriété (P) avec probabilité positive, alors il exists un objet avec la propriété (P). On appelle ça la "méthode probabiliste"

en statistique on compare le comportement des données avec celui d'un objet aléatoire uniforme -> permet de tester si les données suivent une loi uniforme.

en informatique étudier la complexité d'un l'algorithme sur des données aléatoires (ou d'un algorithmes probabilistes).

en physique théorique l'état d'un système est parfois représenté par un objet combinatoire. Quand le système est complexe, le prendre au hasard est un bon modèle.

Probabilités discrètes – Méthodes

probabilités classiques dans beaucoup de modèles, on peut trouver un lien avec une marche aléatoire, une chaîne de Markov, une martingale...

combinatoire certaines questions se ramènent à des problèmes de comptage, pour lesquels on a de nombreux outils, en particulier la combinatoire analytique, ...

autres pour certains modèles spécifiques, certaines théorie d'algèbre ou d'analyse fonctionnelle peuvent être utiles (théorie des représentations, déterminants de Fredholm, ...).

Partie 2

Sous-suites croissantes
dans les permutations aléatoires uniformes

Énoncé du problème

Définition

Soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n. Une sous-suite de σ est une suite $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_\ell}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$. Elle est croissante si $\sigma_{i_1} < \cdots < \sigma_{i_\ell}$. On note $\mathrm{LIS}(\sigma)$ la longueur de la plus longue sous suite croissante de σ.

Exemple

$\mathrm{LIS}(7\,1\,3\,9\,4\,6\,5\,8\,10\,2) = 6$.

Problème (Ulam, '61)

Soit σ_n une permutation aléatoire uniforme. Donner un équivalent asymptotique de $\mathbb{E}(\mathrm{LIS}(\sigma_n))$.

Un premier résultat

Proposition

On a

$$\limsup_{+\infty} \frac{\mathbb{E}(\mathsf{LIS}(\sigma_n))}{\sqrt{n}} \leq e.$$

Preuve au tableau par la méthode du premier moment.

Des résultats plus fins

Theorem (Vershik, Kerov '77)

La quantité $\frac{\mathrm{LIS}(\sigma_n)}{\sqrt{n}}$ *converge en probabilité vers* 2*. En particulier,*

$$\lim_{+\infty} \frac{\mathbb{E}(\mathrm{LIS}(\sigma_n))}{\sqrt{n}} = 2.$$

Theorem (Baik, Deift, Johannson, '99)

$n^{-1/6}(\mathrm{LIS}(\sigma_n) - 2\sqrt{n})$ *converge en distribution et en moments vers la distribution dite de Tracy–Widom. En particulier, on a*

$$\mathbb{E}(\mathrm{LIS}(\sigma_n)) = 2\sqrt{n} + cn^{1/6} + o(n^{1/6}),$$

où c *est le premier moment de la distribution de Tracy–Widom. Numériquement,* $c \approx -1.77$*.*

Qu'est-ce que la distribution de Tracy–Widom ?

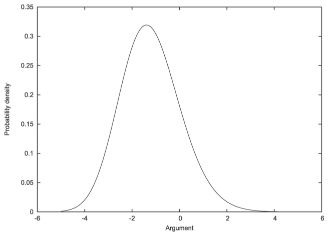
Définition (non informative)

La fonction de répartition de la distribution de Tracy–Widom est donnée par

$$\mathcal{P}[TW \leq s] = F_2(s) = \exp\left(-\int_s^{+\infty} (x-s)q(s)^2 dx\right),$$

où $q(s)$ est une solution (bien choisie!) de l'équation de Painlevé II

$$q''(s) = tq(s) + 2q(s)^3.$$



D'où vient la distribution de Tracy–Widom?

De la théorie des matrices aléatoires !

D'où vient la distribution de Tracy–Widom?

De la théorie des matrices aléatoires !

Soit M une matrice complexe Hermitienne (${}^t\bar{M} = M$) de taille $n \times n$ avec des entrées i.i.d. Gaussiennes sur et au-dessus de la diagonale. On s'intéresse aux valeurs propres de M (qui sont réelles)

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_n.$$

Theorem (Tracy–Widom, '94)

La quantité $\sqrt{2}\, n^{1/6}(\lambda_1 - \sqrt{2n})$ *converge en distribution vers la loi de Tracy–Widom, quand n tend vers l'infini.*

D'où vient la distribution de Tracy–Widom?

De la théorie des matrices aléatoires !

Soit M une matrice complexe Hermitienne (${}^t\bar{M} = M$) de taille $n \times n$ avec des entrées i.i.d. Gaussiennes sur et au-dessus de la diagonale. On s'intéresse aux valeurs propres de M (qui sont réelles)

$$\lambda_1 > \cdots > \lambda_n.$$

Theorem (Tracy–Widom, '94)

La quantité $\sqrt{2}\, n^{1/6}(\lambda_1 - \sqrt{2n})$ converge en distribution vers la loi de Tracy–Widom, quand n tend vers l'infini.

Depuis les résultats de Tracy–Widom et Baik–Deift–Johannson, il a été démontré la loi de Tracy–Widom (ou des variantes) décrit les fluctuations limites dans deux nombreux modèles naturels (discrets ou non).

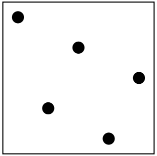
Partie 3

Variante : sous-suites croissantes dans les permutations **séparables** uniformes

Travail en commun avec
F. Bassino (Paris-Nord), M. Bouvel (Nancy), M. Drmota (Vienne),
L .Gerin (Polytechnique), M. Maazoun (Oxford), A. Pierrot (Paris-Sud)

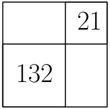
Permutations séparables (1/2)

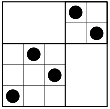
On voit les permutations comme des diagrammes ($\approx$ matrices de permutation).

$\pi = 5\,2\,4\,1\,3 \longleftrightarrow$ 

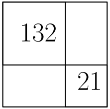
On définit deux opérations associatives :

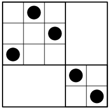
- somme directe

$\oplus[132, 21] =$ 

$=$  $= 13254$

- somme tordue

$\ominus[132, 21] =$ 

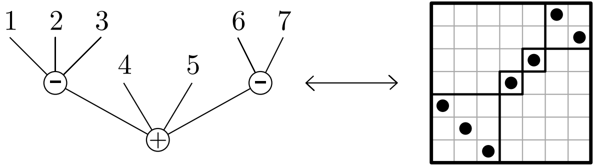
$=$  $= 35421$

Permutations séparables (1/2)

Definition

La classe des permutations séparables est la plus petit ensemble de permutations contenant 1 et stable par somme directe et somme tordue.

Fait : toute permutation séparable peut être uniquement représenté par un arbre avec des signes alternants, où chaque sommet a arité au moins 2.



$= 3214576$

Question

Soit τ_n une permutation aléatoire **séparable** uniforme. Quel est le comportement asymptotique de $\mathrm{LIS}(\tau_n)$?

Méthode du premier moment (1/2)

Soit $Z_{n,k}$ le nombre de sous-suites croissantes de taille k dans τ_n. Si s_n est le nombre de permutations séparable de taille n, on a

$$\mathbb{E}[Z_{n,k}] = \frac{1}{s_n} \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau \text{ séparable}}} \Big| \{ J \subset [n] : |J| = k \text{ et } \tau/J \text{ croissant} \} \Big|.$$

Méthode du premier moment (1/2)

Soit $Z_{n,k}$ le nombre de sous-suites croissantes de taille k dans τ_n. Si s_n est le nombre de permutations séparable de taille n, on a

$$\mathbb{E}[Z_{n,k}] = \frac{1}{s_n} \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau \text{ séparable}}} \Big| \{ J \subset [n] : |J| = k \text{ et } \tau/J \text{ croissant} \} \Big|.$$

Question

Comment calculer (asymptotiquement) s_n ? Et surtout le numérateur ?

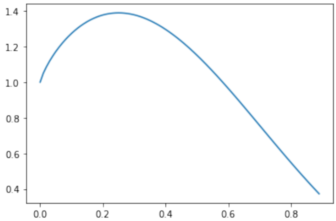
Explications au tableau.

Méthode du premier moment (2/2)

Théorème [BBDFGMP, '21]

$$\mathbb{E}[\boldsymbol{Z}_{n,k}] \sim D_{k/n}\, n^{-1/2} (E_{k/n})^n,$$

où $\beta \mapsto E_\beta$, $\beta \mapsto D_\beta$ sont des fonctions définies par des équations implicites assez complexes.



Il existe β_0 tel que $E_\beta > 1$ si et seulement si $\beta < \beta_0$. On en déduit que, avec proba tendant vers 1,

$$\frac{\mathrm{LIS}(\tau_n)}{n} \leq \beta_0.$$

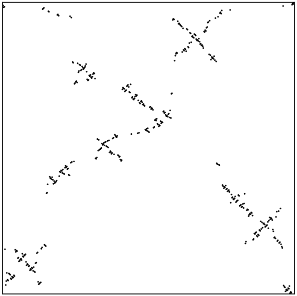
Un résultat plus fort

En fait on a montré un peu plus.

Théorème [BBDFGMP, '21]

$\frac{\mathrm{LIS}(\tau_n)}{n}$ tend en probabilités vers 0.

La preuve utilise un résultat de limite d'échelle pour τ_n, et les propriétés du mouvement Brownien (la limite d'échelle se construit à partir du mouvement Brownien).



Trop difficile pour aujourd'hui !

Fin

Merci de votre attention

Questions bienvenues !