Approche algébrique des formules d'équerre

Valentin Féray
Travail en commun avec Victor Reiner (University of Minnesota)

LaBRI, CNRS

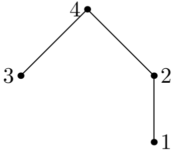
Séminaire de combinatoire
LIAFA (Paris), 16 décembre 2010

Contexte

- Donnée : poset P, i.e. $\{1, \dots, n\}$ muni d'un ordre $\leq$ (partiel).
- Question : nombre d'ordres totaux raffinant cet ordre (= : extensions linéaires) ?

Contexte

- Donnée : poset P, i.e. $\{1, \ldots, n\}$ muni d'un ordre $\leq$ (partiel).
- Question : nombre d'ordres totaux raffinant cet ordre (= : extensions linéaires) ?
- Exemple : $1 < 2, 4$ et $2, 3 < 4$.



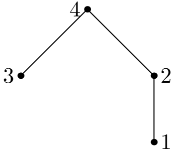
Extensions linéaires :

1234, 1324, 3124.

Il y a en a **3**.

Contexte

- Donnée : poset P, i.e. $\{1, \ldots, n\}$ muni d'un ordre $\leq$ (partiel).
- Question : nombre d'ordres totaux raffinant cet ordre (= : extensions linéaires) ?
- Exemple : $1 < 2, 4$ et $2, 3 < 4$.



Extensions linéaires :

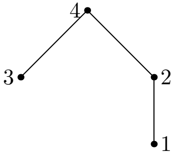
1234, 1324, 3124.

Il y en a **3**.

- Motivations : arbres binaires croissants (bijection avec les permutations), tableaux de Young (représentations du groupe symétrique).

Contexte

- Donnée : poset P, i.e. $\{1, \dots, n\}$ muni d'un ordre $\leq$ (partiel).
- Question : nombre d'ordres totaux raffinant cet ordre (= : extensions linéaires) ?
- Exemple : $1 < 2, 4$ et $2, 3 < 4$.



Extensions linéaires :

1234, 1324, 3124.

Il y en a **3**.

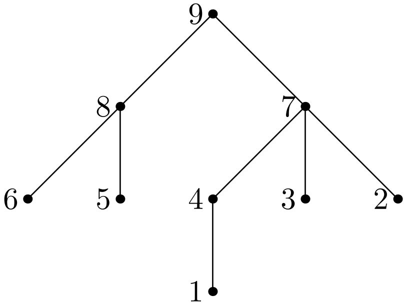
- Motivations : arbres binaires croissants (bijection avec les permutations), tableaux de Young (représentations du groupe symétrique).
- Ici : approche algébrique
  $\Rightarrow$ nouvelle preuve et généralisation de formules connues.

Plan

1. Quelques formules connues (ou non)
2. Approche algébrique : séries de Hilbert
3. Générateurs et relations
4. Cas simple : arbres décorés

Formules des équerres pour les arbres

Cas où P est un arbre.



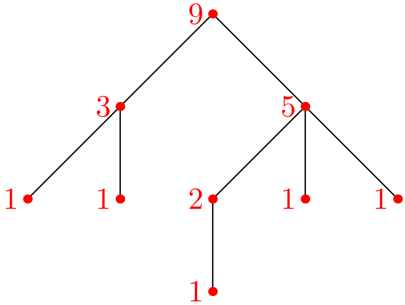
Nombre d'extensions linéaires (Knuth, 73) :

$$|\mathcal{L}(P)| = \frac{n!}{\prod_{v \in P} h_v}$$

h_v : taille du sous-arbre accroché en v.

Formules des équerres pour les arbres

Cas où P est un arbre.



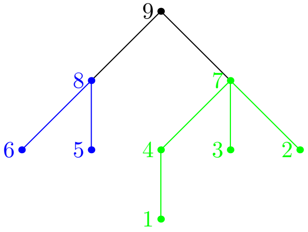
Nombre d'extensions linéaires (Knuth, 73) :

$$|\mathcal{L}(P)| = \frac{n!}{\prod_{v \in P} h_v}$$

$$= \frac{9!}{9 * 5 * 3 * 2} = 8*7*6*4 = 1344$$

h_v : taille du sous-arbre accroché en v.

Preuve (par récurrence)

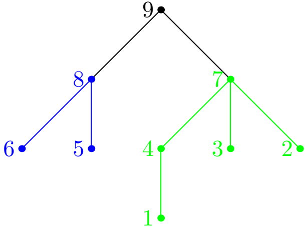


Extension linéaire de P $=$

$\big($mélange d'extensions linéaires de P_1 et $P_2\big) \cdot 9$

Exemple : 163254789.

Preuve (par récurrence)

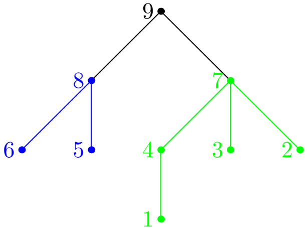


Extension linéaire de P $=$
$\big($mélange d'extensions linéaires de P_1 et $P_2\big) \cdot 9$

Exemple : 163254789.

Nb d'extensions de P_1 : $|P_1|!/(\prod_{v \in P_1} h_v)$.
Nb d'extensions de P_2 : $|P_2|!/(\prod_{v \in P_2} h_v)$.
Nb de mélanges : $\binom{|P_1|+|P_2|}{|P_1|} = \frac{(|P|-1)!}{|P_1|!\ |P_2|!}$

Preuve (par récurrence)



Extension linéaire de P = (mélange d'extensions linéaires de P_1 et P_2) $\cdot\, 9$

Exemple : 163254789.

Nb d'extensions de P_1 : $|P_1|!/(\prod_{v \in P_1} h_v)$.
Nb d'extensions de P_2 : $|P_2|!/(\prod_{v \in P_2} h_v)$.
Nb de mélanges : $\binom{|P_1|+|P_2|}{|P_1|} = \frac{(|P|-1)!}{|P_1|!\ |P_2|!}$

$\Rightarrow$ Nb d'extensions de P :

$$\frac{|P_1|!}{\prod_{v \in P_1} h_v} \frac{|P_2|!}{\prod_{v \in P_2} h_v} \frac{(|P|-1)!}{|P_1|!\ |P_2|!} = \frac{(|P|-1)!}{\prod_{v \in P_1 \cup P_2} h_v} = \frac{|P|!}{\prod_{v \in P} h_v}$$

q-analogue

Indice majeur

$$\mathrm{maj}(w) := \sum_{i \in D(w)} i \text{ où } D(w) = \{i : w_i > w_{i+1}\}.$$

Ex : $\mathrm{maj}(31452) = 1 + 4 = 5$

Théorème (Stanley 72, Björner, Wachs 88)

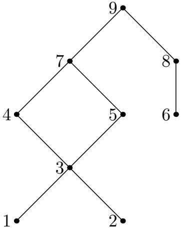
Si P est une forêt et si $i \leq_P j \Rightarrow i \leq_{\mathbb{Z}} j$ (i.e. on a choisi un étiquetage décroissant), alors :

$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[|P|]_q!}{\prod_{v \in P} [h_v]_q}$$

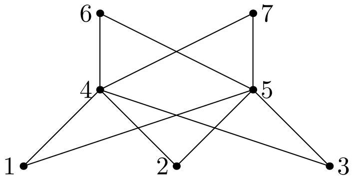
Rappel

$$[k]_q = 1 + q + \cdots + q^{k-1}$$
$$[n]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdots [n]_q$$

Nouveaux exemples



$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[|P|]_q ! [h_4 + h_5]_q}{[h_{4,5}]_q \prod_{v \in P} [h_v]_q}$$



$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[|P|]_q ! [h_6 + h_7]_q [h_4 + h_5]_q}{[h_{6,7}]_q [h_{4,5}]_q \prod_{v \in P} [h_v]_q}$$

où $h_{v,v'}$ est la taille du sous-graphe sous v et v'.
($h_{4,5} = 5$ dans les 2 cas et $h_{6,7} = 7$ à droite.)

P-Partitions

On suppose $i \leq_P j \Rightarrow i \leq_{\mathbb{Z}} j$.

Définition

Une *P-partition* est une fonction $f : \{1, \dots, n\} \to \mathbb{N}$ telle que

$$i \leq_P j \Rightarrow f(i) \geq f(j)$$

Notation : $|f| = f(1) + \cdots + f(n)$.

P-partitions et extensions linéaires

Lemme

Pour chaque fonction $f : [n] \to \mathbb{N}$, il existe une unique permutation w telle que

$$f(w_1) \geq \cdots \geq f(w_n)$$

avec égalité possible seulement si $w_i < w_{i+1}$.
De plus, f est une P-partition ssi w est une extension linaire de P.

P-partitions et extensions linéaires

Lemme

Pour chaque fonction $f : [n] \to \mathbb{N}$, il existe une unique permutation w telle que

$$f(w_1) \geq \cdots \geq f(w_n)$$

avec égalité possible seulement si $w_i < w_{i+1}$.
De plus, f est une P-partition ssi w est une extension linaire de P.

Exemple : $f = 2\ 4\ 3\ 5\ 1\ 4\ 3\ 4\ 1\ 5$

- Nécessairement, l'ensemble des pré-images du maximum de f (ici 5) corresponds aux premiers éléments de la permutation. Ici, $\{w_1, w_2\} = \{4, 10\}$. Comme $f(w_1) = f(w_2)$, il n'y a pas de descente entre w_1 et w_2 et donc $w_1 = 4$ et $w_2 = 10$.

P-partitions et extensions linéaires

Lemme

Pour chaque fonction $f : [n] \to \mathbb{N}$, il existe une unique permutation w telle que

$$f(w_1) \geq \cdots \geq f(w_n)$$

avec égalité possible seulement si $w_i < w_{i+1}$.
De plus, f est une P-partition ssi w est une extension linaire de P.

Exemple : $f = 2\ 4\ 3\ 5\ 1\ 4\ 3\ 4\ 1\ 5$

- Nécessairement, l'ensemble des pré-images du maximum de f (ici 5) corresponds aux premiers éléments de la permutation. Ici, $\{w_1, w_2\} = \{4, 10\}$. Comme $f(w_1) = f(w_2)$, il n'y a pas de descente entre w_1 et w_2 et donc $w_1 = 4$ et $w_2 = 10$.
- de même, $\{w_3, w_4, w_5\} = f^{-1}(4) = \{2, 6, 8\}$. Comme on ne veut pas de descentes entre ces valeurs, $w_3 = 2$, $w_4 = 6$ et $w_5 = 8$.
- ...

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$f(2) \geq f(5) > f(3) > f(1) \geq f(7) > f(4),$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$f(2) \geq f(5) > f(3) > f(1) \geq f(7) > f(4),$$

i.e.

$$f(7) - 1 \geq f(4)$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$\begin{array}{lccccccccccc} & f(2) & \geq & f(5) & > & f(3) & > & f(1) & \geq & f(7) & > & f(4), \\ \text{i.e.} & & & & & & & f(1)-1 & \geq & f(7)-1 & \geq & f(4) \end{array}$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$f(2) \geq f(5) > f(3) > f(1) \geq f(7) > f(4),$$

i.e.

$$f(3) - 2 \geq f(1) - 1 \geq f(7) - 1 \geq f(4)$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ {\color{red}5}\ {\color{red}3}\ 1\ {\color{red}7}\ 4$. On cherche des f tels que

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & f(2) & \geq & f(5) & > & f(3) & > & f(1) & \geq & f(7) & > & f(4), \\ \text{i.e.} & f(2)-3 & \geq & f(5)-3 & \geq & f(3)-2 & \geq & f(1)-1 & \geq & f(7)-1 & \geq & f(4) \end{array}$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$\begin{array}{lccccccccccc} & f(2) & \geq & f(5) & > & f(3) & > & f(1) & \geq & f(7) & > & f(4), \\ \text{i.e. } & f(2)-3 & \geq & f(5)-3 & \geq & f(3)-2 & \geq & f(1)-1 & \geq & f(7)-1 & \geq & f(4) \end{array}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{f \mapsto w} q^{|f|} &= \left(\sum_{g \text{ décroissante}} q^{|g|+10} \right) = q^{\mathrm{maj}(w)} \left(\sum_{g \text{ décroissante}} q^{|g|} \right) \\ &= \frac{q^{\mathrm{maj}(w)}}{\prod_{i \leq n}(1-q^i)} \end{aligned}$$

Série génératrice des P-partitions

Dans l'autre sens : fixons $w = 2\ 5\ 3\ 1\ 7\ 4$. On cherche des f tels que

$$\begin{array}{lcccccccccccc} & f(2) & \geq & f(5) & > & f(3) & > & f(1) & \geq & f(7) & > & f(4), \\ \text{i.e. } & f(2)-3 & \geq & f(5)-3 & \geq & f(3)-2 & \geq & f(1)-1 & \geq & f(7)-1 & \geq & f(4) \end{array}$$

Donc

$$\sum_{f \mapsto w} q^{|f|} = \left(\sum_{g \text{ décroissante}} q^{|g|+10} \right) = q^{\mathrm{maj}(w)} \left(\sum_{g \text{ décroissante}} q^{|g|} \right)$$
$$= \frac{q^{\mathrm{maj}(w)}}{\prod_{i \leq n} (1-q^i)}$$

Proposition

$$\left(\prod_{i \leq n} (1-q^i) \right) \left(\sum_{f \ P\text{-partition}} q^{|f|} \right) = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)}.$$

Qu'est-ce qu'on y gagne ?

Structure de semi-groupe commutatif sur les P-partitions :

$$f \cdot g(i) := f(i) + g(i).$$

On considère l'algèbre $R_P = Vect(\{f, \ f \ P\text{-partitions}\})$.

Autre description :

$$\mathbf{x}^f := x_1^{f(1)} \dots x_n^{f(n)}$$
$$R_P = k\left[x^f, \ f \ P\text{-partitions}\right] \subset k[x_1, \dots, x_n]$$

$$\sum_{f \ P\text{-partition}} q^{|f|} = \sum_d q^d \dim(R_P \cap k_d[x_1, \dots, x_n]) =: \mathrm{Hilb}(R_P, q)$$

On va étudier la structure de R_P.

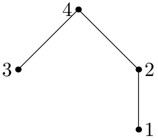
Ensemble minimal de générateurs

Definition

Un idéal I d'un poset P est un sous-ensemble de P tel que :

$$\text{Si } i \in I \text{ et } j \leq_P i, \text{ alors} j \in I$$

Exemple :

$P =$ 

Ses idéaux sont :

$$\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}$$

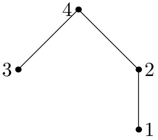
Ensemble minimal de générateurs

Definition

Un idéal I d'un poset P est un sous-ensemble de P tel que :

$$\text{Si } i \in I \text{ et } j \leq_P i, \text{ alors} j \in I$$

Exemple :

$P =$ 

Ses idéaux sont :

$$\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\},$$
$$\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}$$

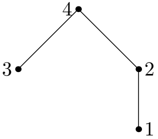
Proposition

Les $\mathbf{x}^I$ correspondant aux idéaux I connexes forment un ensemble minimal de générateurs de R_P.

Exemple : $R_P = k[x_1,\ x_1x_2,\ x_3,\ x_1x_2x_3x_4]$.

Preuve par l'exemple

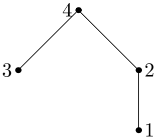
$P =$



Considérons la P-partition f suivante

$$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$$

Preuve par l'exemple

$P =$ 

Considérons la P-partition f suivante

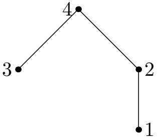
$$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$$

On regarde $I = \{i \ : \ f(i) > 0\}$. C'est un idéal. Ici, $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathbf{x}^f = \mathbf{x}^I * \mathbf{x}^{f'},$$

où $f' = f - \chi_I$ est une P-partition.
Ex : $x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4 = (x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1^2 x_2^2 x_3)$.

Preuve par l'exemple

$P =$ 

Considérons la P-partition f suivante

$$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$$

On regarde $I = \{i \ : \ f(i) > 0\}$. C'est un idéal. Ici, $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

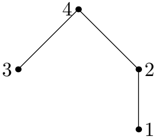
$$\mathbf{x}^f = \mathbf{x}^I * \mathbf{x}^{f'},$$

où $f' = f - \chi_I$ est une P-partition.
Ex : $x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4 = (x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1^2 x_2^2 x_3)$.

On continue : $x_1^2 x_2^2 x_3 = (x_1 x_2 x_3)(x_1 x_2)$.

Comme $\{1, 2, 3\}$ n'est pas connexe, $x_1 x_2 x_3$ n'est pas un générateur, mais c'est le produit des générateurs correspondants à ses composantes connexe $(x_1 x_2) x_3$.

Preuve par l'exemple

$P =$ 

Considérons la P-partition f suivante

$$f(1) = 3, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 1$$

On regarde $I = \{i \ : \ f(i) > 0\}$. C'est un idéal. Ici, $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathbf{x}^f = \mathbf{x}^I * \mathbf{x}^{f'},$$

où $f' = f - \chi_I$ est une P-partition.
Ex : $x_1^3 x_2^3 x_3^2 x_4 = (x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1^2 x_2^2 x_3)$.

On continue : $x_1^2 x_2^2 x_3 = (x_1 x_2 x_3)(x_1 x_2)$.

$$\mathbf{x}^f = (x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1 x_2) x_3 (x_1 x_2)$$

Décomposition en produit de $\mathbf{x}^I$

En fait, on a prouvé le résultat suivant

Lemme

Soit f une P-partition. Alors

$$f = \prod_j \mathbf{x}^{I_j},$$

où les I_j sont des idéaux connexes qui s'intersectent trivialement 2 à 2, i.e.

$$\forall_{j_1,j_2},\ I_{j_1} \cap I_{j_2} = \begin{cases} \emptyset \\ I_{j_1} \\ I_{j_2} \end{cases}$$

Décomposition en produit de $\mathbf{x}^I$

En fait, on a prouvé le résultat suivant

Lemme

Soit f une P-partition. Alors

$$f = \prod_j \mathbf{x}^{I_j},$$

où les I_j sont des idéaux connexes qui s'intersectent trivialement 2 à 2, i.e.

$$\forall_{j_1, j_2}, \quad I_{j_1} \cap I_{j_2} = \begin{cases} \emptyset \\ I_{j_1} \\ I_{j_2} \end{cases}$$

On peut montrer que cette décomposition est *unique*.

Relations

Soient I_1 et I_2 deux idéaux de P avec $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

- $I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2$ sont des idéaux de P.
- $I_1 \cup I_2$ est connexe, $I_1 \cap I_2$ est l'union de ses composantes connexes $I^{(j)}$.
- Comme $\chi_{I_1} + \chi_{I_2} = \chi_{I_1 \cup I_2} + \chi_{I_1 \cap I_2}$,

$$\mathbf{x}^{I_1}\mathbf{x}^{I_2} = \mathbf{x}^{I_1 \cup I_2} \prod_j \mathbf{x}^{I^{(j)}}$$

Relations

Soient I_1 et I_2 deux idéaux de P avec $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

- $I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2$ sont des idéaux de P.
- $I_1 \cup I_2$ est connexe, $I_1 \cap I_2$ est l'union de ses composantes connexes $I^{(j)}$.
- Comme $\chi_{I_1} + \chi_{I_2} = \chi_{I_1 \cup I_2} + \chi_{I_1 \cap I_2}$,

$$\mathbf{x}^{I_1} \mathbf{x}^{I_2} = \mathbf{x}^{I_1 \cup I_2} \prod_j \mathbf{x}^{I^{(j)}}$$

relation non-triviale $\Leftrightarrow$ I_1 et I_2 ont une intersection non triviale

Relations

Soient I_1 et I_2 deux idéaux de P avec $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

- $I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2$ sont des idéaux de P.
- $I_1 \cup I_2$ est connexe, $I_1 \cap I_2$ est l'union de ses composantes connexes $I^{(j)}$.
- Comme $\chi_{I_1} + \chi_{I_2} = \chi_{I_1 \cup I_2} + \chi_{I_1 \cap I_2}$,

$$\mathbf{x}^{I_1}\mathbf{x}^{I_2} = \mathbf{x}^{I_1 \cup I_2} \prod_j \mathbf{x}^{I^{(j)}}$$

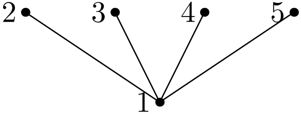
Proposition

Les relations

$$(R_{I_1,I_2}) \qquad \mathbf{x}^{I_1}\mathbf{x}^{I_2} = \mathbf{x}^{I_1 \cup I_2} \prod_j \chi_{I^{(j)}},$$

quand $\{I_1, I_2\}$ décrit l'ensemble des paires d'idéaux avec une intersection non triviale, forment un ensemble complet minimal de relations.

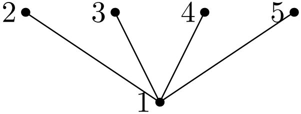
Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes



Considérons un monôme

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_2 x_3)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_4 x_5).$$

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes



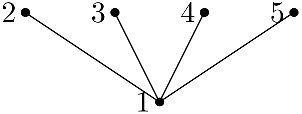
On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_2 x_3)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_4 x_5).$$

Les termes en rouge ont une intersection non triviale.

$\rightarrow$ on applique la relation (R) correspondante.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

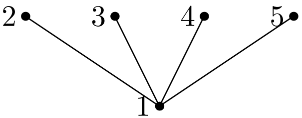


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_3)(x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1 x_4 x_5).$$

$\rightarrow$ on applique la relation (R) correspondante.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

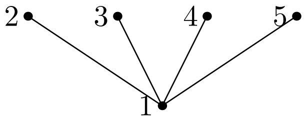


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_3)(x_1 x_2 x_3 x_4)(x_1 x_4 x_5).$$

Les termes en rouge ont une intersection non triviale.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

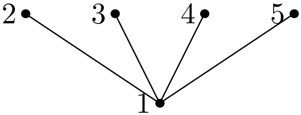


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_3)(x_1 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

$\rightarrow$ on applique la relation (R) correspondante.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

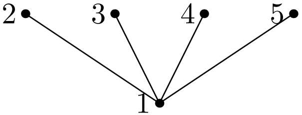


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1 x_3)(x_1 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Les termes en rouge ont une intersection non triviale.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

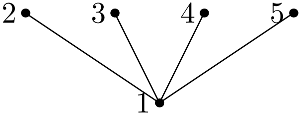


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

$\rightarrow$ on applique la relation (R) correspondante.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes

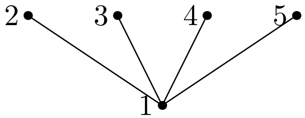


On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Toutes les interactions 2 à 2 sont triviales.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes



On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Toutes les interactions 2 à 2 sont triviales.

Lemme

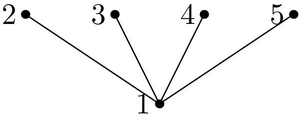
Soit $\mathcal{I}$ une famille d'idéaux et $\mathcal{J}$ l'unique famille d'idéaux avec intersections triviales tel que

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} \mathsf{x}^I = \prod_{J \in \mathcal{J}} \mathsf{x}^J$$

Cette relation découle des relations (R).

Idée de preuve : On applique (R) au membre de gauche jusqu'à ce que toutes les intersections soient triviales.
Termine car $\sum_{\{I_1, I_2\} \subset \mathcal{I}} \big| |I_1| - |I_2| \big|$ croît.

Esquisse de preuve (1) : égalité de monômes



On a :

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} x^I = (x_1)(x_1 x_3 x_4)(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Toutes les interactions 2 à 2 sont triviales.

Lemme

Soit $\mathcal{I}$ une famille d'idéaux et $\mathcal{J}$ l'*unique* famille d'idéaux avec intersections triviales tel que

$$\prod_{I \in \mathcal{I}} \mathsf{x}^I = \prod_{J \in \mathcal{J}} \mathsf{x}^J$$

Cette relation découle des relations (R).

Corollaire

Les relations du type $\prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathsf{x}^I = \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathsf{x}^I$ découlent de (R).

Esquisse de preuve (2) : relation générale

Considérons une relation

$$\sum_k c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

$\prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I$ est égal à un certain monôme $\mathbf{x}^f$.

Nécessairement, au moins un des autres $\prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I$ doit être égal à $\mathbf{x}^f$ (disons que c'est pour $k = 2$).

Esquisse de preuve (2) : relation générale

Considérons une relation

$$\sum_k c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

$\prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I$ est égal à un certain monôme $\mathbf{x}^f$.

Nécessairement, au moins un des autres $\prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I$ doit être égal à $\mathbf{x}^f$ (disons que c'est pour $k = 2$).

En utilisant les relations (R),

- On peut prouver que

$$c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I = c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathbf{x}^I.$$

Esquisse de preuve (2) : relation générale

Considérons une relation

$$\sum_k c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

$\prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I$ est égal à un certain monôme $\mathbf{x}^f$.

Nécessairement, au moins un des autres $\prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I$ doit être égal à $\mathbf{x}^f$ (disons que c'est pour $k = 2$).

En utilisant les relations (R),

- On peut prouver que

$$c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I = c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathbf{x}^I.$$

- On peut ramener la relation ci-dessus à

$$(c_2 + c_1) \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathbf{x}^I + \sum_{k>2} c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

Esquisse de preuve (2) : relation générale

Considérons une relation

$$\sum_k c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

$\prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I$ est égal à un certain monôme $\mathbf{x}^f$.

Nécessairement, au moins un des autres $\prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I$ doit être égal à $\mathbf{x}^f$ (disons que c'est pour $k = 2$).

En utilisant les relations (R),

- On peut prouver que

$$c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_1} \mathbf{x}^I = c_1 \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathbf{x}^I.$$

- On peut ramener la relation ci-dessus à

$$(c_2 + c_1) \prod_{I \in \mathcal{I}_2} \mathbf{x}^I + \sum_{k>2} c_k \prod_{I \in \mathcal{I}_k} \mathbf{x}^I = 0$$

- par récurrence sur k, on peut prouver toute relation.

Retour au problème

On a “prouvé”

Théorème (F., Reiner 2010)

R_P admet la présentation suivante :

- **générateurs** : $\mathbf{x}^I$ pour I idéal connexe.
- **relations** : R_{I_1,I_2} pour $\{I_1, I_2\}$ paire d'idéaux avec une intersection non triviale.

Malheureusement, une présentation ne suffit pas à calculer $\mathrm{Hilb}(R_P, q)\dots$

Sauf dans certains cas particuliers. . .

Cas sans relations

Proposition

Soit P un poset. Il y a équivalence entre

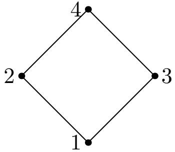
- *Toute paire d'idéaux connexes a une intersection triviale*
- *Tout idéal connexe est principal, i.e. $I = \{x, x \leq a\}$ pour un certain a.*
- *Tout élément est couvert par au plus un élément.*
- *Le diagramme de Hasse de P est une forêt.*

Dans ce cas, il n'y a pas de relations, i.e. $\left\{\prod_{I \text{ idéal}} (\mathbf{x}^I)^{n_I}, n_I \geq 0\right\}$ forme une base linéaire de R_P.

$$\mathrm{Hilb}(R_P, q) = \sum_{n_I \geq 0} \prod_I q^{\sum_I n_I |I|} = \prod_I \frac{1}{1 - q^{|I|}} = \prod_v \frac{1}{1 - q^{h_v}}$$

Rappel : $\mathrm{Hilb}(R_P, q) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)}}{\prod_{i \leq n} (1 - q^i)}$

1 relation

$P =$ 

- générateurs : x_1, x_1x_2, x_1x_3, $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_3x_4$.
- relation : $x_1(x_1x_2x_3) = (x_1x_2)(x_1x_3)$.

$$\begin{aligned}\text{Base de } R_P : &\{(x_1)^a(x_1x_2)^b(x_1x_2x_3)^c(x_1x_2x_3x_4)^d, a, b, c, d \geq 0 \\ &\sqcup\{(x_1)^a(x_1x_3)^b(x_1x_2x_3)^c(x_1x_2x_3x_4)^d, b > 0,\ a, c, d \geq 0\}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Hilb}(R_P, q) &= \frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)} + \frac{q^2}{\dots} \\ &= \frac{1-q^4}{(1-q)(1-q^2)^2(1-q^3)(1-q^4)}\end{aligned}$$

Moralement, la relation (R) ajoute un facteur $1 - q^{\deg(R)}$.

Cas favorable

Quand il n'y a pas de "relations entre les relations",

$$\mathrm{Hilb}(R_P, q) = \frac{\prod_{R \text{ rels}}(1 - q^{\deg(R)})}{\prod_{G \text{ gens}(1-q^{\deg(G)})}} = \frac{\prod_{\{I_1,I_2\}}(1 - q^{|I_1|+|I_2|})}{\prod_I (1 - q^{|I|})}$$

Rappel :

$$\mathrm{Hilb}(R_P, q) = \frac{\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)}}{\prod_{i \leq n}(1 - q^i)}$$

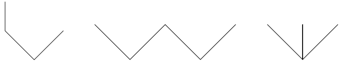
Donc, dans ce cas (on dira que P est un arbre décoré) :

$$\frac{\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)}}{\prod_{i \leq n}(1 - q^i)} = \frac{[n]_q! \prod_{\{I_1,I_2\}}([|I_1| + |I_2|]_q)}{\prod_I [|I|]_q}$$

Caractérisation des arbres décorés

Théorème (F.,Reiner 2010)

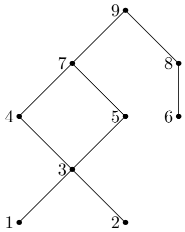
Il y a équivalence entre :

- P est un arbre décoré.
- $\#$ générateurs $= |P| + \#$ relations.
- Tout idéal est soit principal, soit s'écrit de manière unique comme une union de 2 idéaux avec une intersection non triviale.
- P ne contient pas les sous-posets 
- caractérisation constructive.

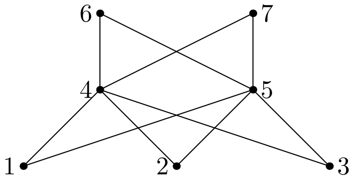
Dans ce cas, on a la formule des équerres du slide précédent.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : par la théorie des anneaux Cohen-Macaulay.
Le reste de la preuve est combinatoire.

Exemples



$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[|P|]_q![h_4+h_5]_q}{[h_{4,5}]_q \prod_{v \in P}[h_v]_q}$$



$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[|P|]_q![h_6+h_7]_q[h_4+h_5]_q}{[h_{6,7}]_q[h_{4,5}]_q \prod_{v \in P}[h_v]_q}$$

où $h_{v,v'}$ est la taille du sous-graphe sous v et v'.
($h_{4,5} = 5$ dans les 2 cas et $h_{6,7} = 7$ à droite.)

Version multivariée

On pose $\deg_i(\mathbf{x}^f) = f(i)$ et
si toute paire d'idéaux a une intersection connexe,

$$\deg_t(\mathbf{x}^f) = d \text{ où } \mathbf{x}^f = \prod_{j=1}^{d} \mathbf{x}^{I_j}.$$

On définit
$\mathrm{Hilb}(R_P; q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{f\ P\text{-partition}} q_1^{\deg_1(\mathbf{x}^f)} \dots q_n^{\deg_n(\mathbf{x}^f)} t^{\deg_t(\mathbf{x}^f)}$.
Alors

$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \frac{t^{\mathrm{des}_P(w)} \prod_{i \in \mathrm{Des}(w)} \mathbf{q}^{w|_{[1,i]}}}{\prod_{i=1}^{n} (1 - t^{c_P(w|_{[1,i]})} \mathbf{q}^{w|_{[1,i]}})} = \frac{\prod_{\{J_1, J_2\}} (1 - t^2 \mathbf{q}^{J_1} \mathbf{q}^{J_2})}{\prod_J (1 - t\mathbf{q}^J)}$$

- $c_P(J)$ désigne le nombre de composantes connexes de J, vu comme un sous-poset de P.
- $\mathrm{des}_P(w) := \sum_{i \in \mathrm{Des}(w)} c_P(w|_{[1,i]})$

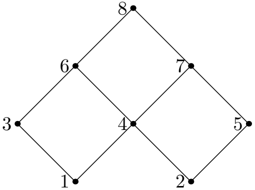
Questions ouvertes

- Dans le cas général, description combinatoire des “relations entre relations”(=syzygies), “relations entre syzygies”,. . .

  i.e. écrire une *résolution* de R_P.

- Interpréter algébriquement la formule des équerres de Frame-Robinson-Thrall pour les diagrammes de Young.

$P =$



$$\sum_{w \in \mathcal{L}(P)} q^{\mathrm{maj}(w)} = \frac{[n]_q!}{5_q 4_q 4_q 3_q 2_q 2_q 1_q}$$

Merci !

Venez aux JCB !

“car c’est la meilleure conférence de combinatoire” (JFM, 2010)

À Bordeaux, du mercredi 26 au vendredi 28 janvier.