Un problème combinatoire sur les graphes lié aux caractères du groupe symétrique

Valentin Féray

LaBRI, CNRS

Séminaire du LaBRI, 6 mai 2010

Plan

1. Contexte de mes recherches
   - Représentations du groupe symétrique
   - Lien avec la combinatoire
2. Un exemple de problème combinatoire rencontré
   - Itération du poinçonnage
   - Lien avec la première partie

Permutations

Definition

Permutation de taille $n :=$ bijection de $\{1, \dots, n\} \simeq \{1, \dots, n\}$

Exemple : $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \color{red}{4} & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{2} \end{matrix}$.

Permutations

Definition

Permutation de taille $n :=$ bijection de $\{1, \dots, n\} \simeq \{1, \dots, n\}$

Exemple : $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \color{red}{4} & \color{red}{1} & \color{red}{3} & \color{red}{2} \end{matrix}$.

On peut les composer $\Rightarrow$ Elles forment un groupe S_n.

Exemple simple et *assez* générique de groupe fini non commutatif.

Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

Plus précisément,

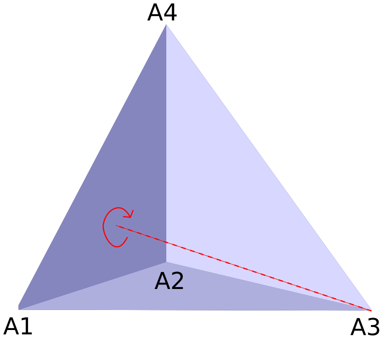
$$\begin{array}{rcl} \text{élément} & \mapsto & \text{application linéraire de } \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \text{composition des éléments} & \leftrightarrow & \text{composition des applications linéaires} \end{array}$$

Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

exemple : 4 1 3 2 dans la représentation *géométrique*



Représentations de groupe

Qu'est-ce qu'une représentation ?

Voir les éléments d'un groupe comme des transformations de l'espace

En général, beaucoup plus complexe.

On aimerait classifier toutes les représentations *en toute dimension* (à isomorphisme près).

Caractères

Une représentation = une matrice $\rho(g)$ par élément du groupe.

son caractère χ=

on ne conserve que $\mathrm{tr}(\rho(g))$.

χ est une fonction $S_n \to \mathbb{C}$.

Caractères

Une représentation = une matrice $\rho(g)$ par élément du groupe.

son caractère χ=

on ne conserve que $\mathrm{tr}(\rho(g))$.

χ est une fonction $S_n \to \mathbb{C}$.

Miracle

Une représentation est déterminée par son caractère.

Caractères

Une représentation = une matrice $\rho(g)$ par élément du groupe.

son caractère χ=
on ne conserve que $\mathrm{tr}(\rho(g))$.

χ est une fonction $S_n \to \mathbb{C}$.

Miracle

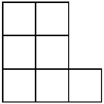
Une représentation est déterminée par son caractère.

$\Rightarrow$ on étudie les caractères

problème algébrique au lieu de géométrique.

Objets liés

Diagrammes et tableaux de Young :

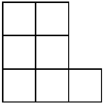


$(3,2,2)$

4	7	
2	5	
1	3	6

Objets liés

Diagrammes et tableaux de Young :



$(3, 2, 2)$

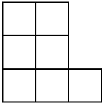
$$\begin{array}{|c|c|c} \hline 4 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 1 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{6} \\ \hline \end{array}$$

Polynômes à plusieurs variables symétriques :

$$e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_3$$
$$p_i(X_1, \ldots, X_k) = X_1^i + \cdots + X_k^i$$

Objets liés

Diagrammes et tableaux de Young :



$(3, 2, 2)$

4	7	
2	5	
1	3	6

Polynômes à plusieurs variables symétriques :

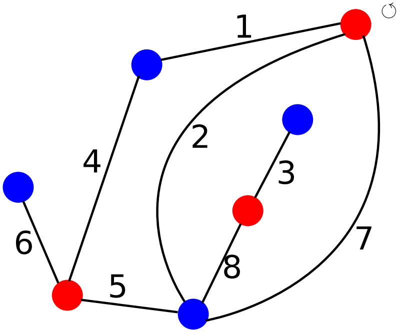
$$e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_3$$
$$p_i(X_1, \dots, X_k) = X_1^i + \dots + X_k^i$$

Graphes...

Graphe bipartite planaire et permutations

Soit G un graphe bipartite :

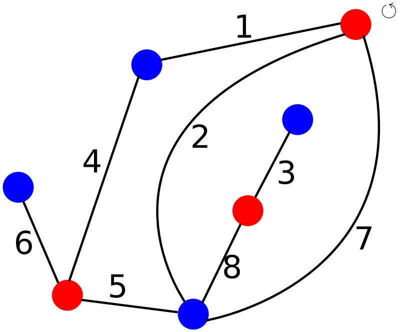
- dessiné dans le plan
- dont les arêtes sont numérotées de 1 à n



Graphe bipartite planaire et permutations

Soit G un graphe bipartite :

- dessiné dans le plan
- dont les arêtes sont numérotées de 1 à n



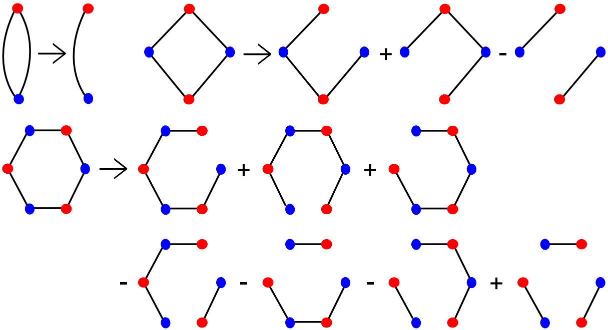
On lui associe deux permutations

$\sigma_{\color{red}\bullet} = {\color{red}2\ 7\ 8\ 6\ 4\ 5\ 1\ 3}$

$\sigma_{\color{blue}\bullet} = {\color{blue}4\ 5\ 3\ 1\ 7\ 6\ 8\ 2}$

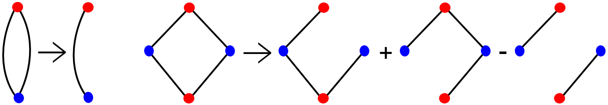
Poinçonnage

On choisit un cycle dans un graphe bipartite planaire. Considérons l'opération :

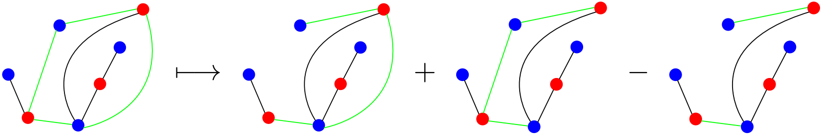


Poinçonnage

On choisit un cycle dans un graphe bipartite planaire. Considérons l'opération :

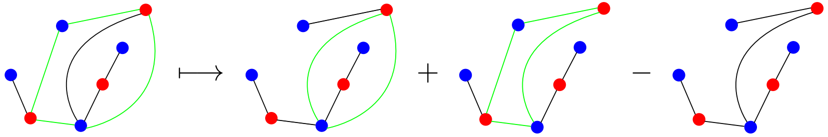


Exemple :



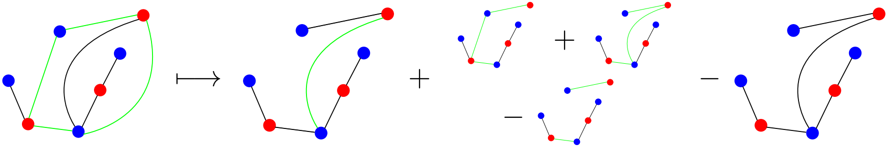
Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



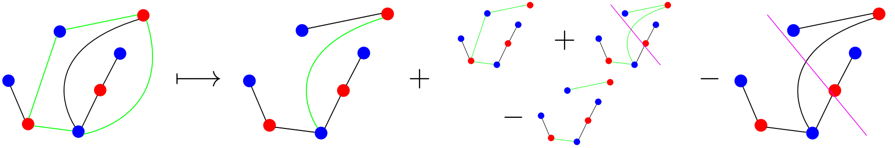
Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



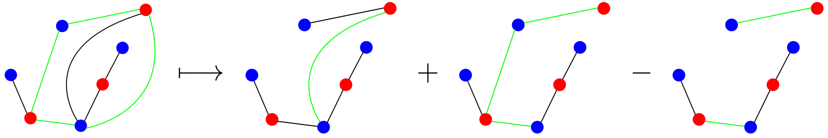
Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



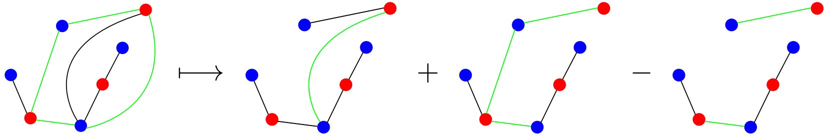
Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple



Confluence et signes

On peut itérer cette transformation simple

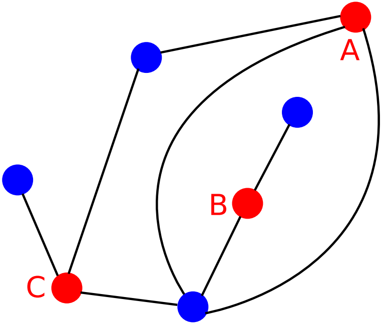


Propriétés

- Le résultat $D(G)$ ne dépend pas des cycles choisis.
- Les signes dépendent seulement du nombre de composantes connexes.

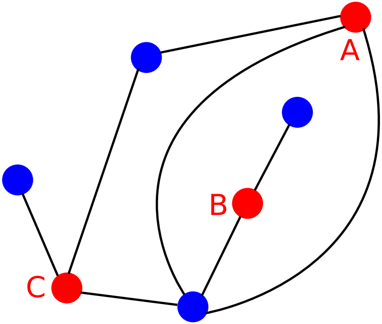
Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



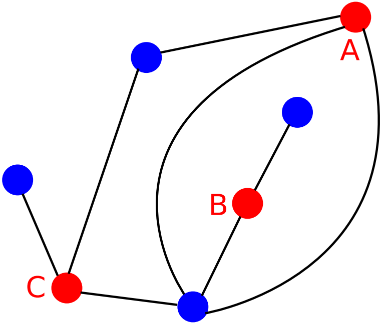
Question

Y a-t-il dans $D(G)$ une forêt où :

- A, B et C sont dans des comp. connexes différentes ;
- A a exactement 1 voisin ;
- B a exactement 1 voisin ;
- C a exactement 2 voisins ?

Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



Question

Y a-t-il dans $D(G)$ une forêt où :

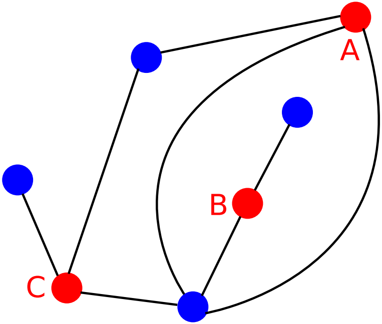
- A, B et C sont dans des comp. connexes différentes ;
- A a exactement 1 voisin ;
- B a exactement 1 voisin ;
- C a exactement 2 voisins ?

$$\text{CN :} \quad \begin{array}{ll} |\text{Voisins}(A)| \geq 1 & |\text{Voisins}(B) \cup \text{Voisins}(C)| \geq 1+2 \\ |\text{Voisins}(B)| \geq 1 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(C)| \geq 1+2 \\ |\text{Voisins}(C)| \geq 2 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(B)| \geq 1+1 \end{array}$$

(Lemme des mariages de Hall)

Nombre de forêts minimales

On étiquette sommets rouges



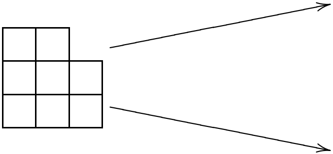
Question

Y a-t-il dans $D(G)$ une forêt où :

- A, B et C sont dans des comp. connexes différentes ;
- A a exactement 1 voisin ;
- B a exactement 1 voisin ;
- C a exactement 2 voisins ?

$$\text{OUI} \Leftrightarrow \begin{cases} |\text{Voisins}(A)| > 1 & |\text{Voisins}(B) \cup \text{Voisins}(C)| > 1+2 \\ |\text{Voisins}(B)| > 1 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(C)| > 1+2 \\ |\text{Voisins}(C)| > 2 & |\text{Voisins}(A) \cup \text{Voisins}(B)| > 1+1 \end{cases}$$

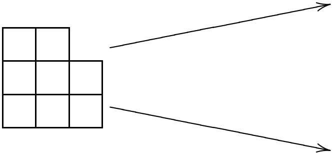
Conséquences sur les caractères

diagramme λ 

Conséquences sur les caractères

Représentation de S_n

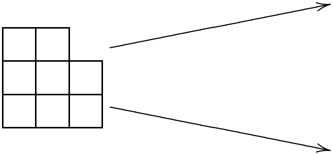
diagramme λ



Conséquences sur les caractères

Représentation de S_n

diagramme λ

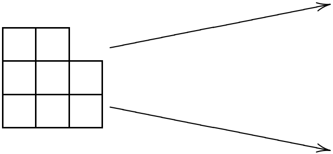


suite de nombres $R_2, R_3, \ldots$

Conséquences sur les caractères

Représentation de S_n

diagramme λ



suite de nombres $R_2, R_3, \dots$

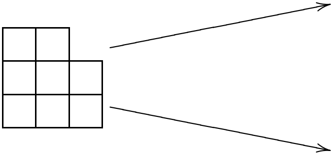
Fixons une permutation $\sigma \in S_n$.

Problème

Exprimer caractère $\chi^\lambda(\sigma)$ en fonction des R_i.

Conséquences sur les caractères

Représentation de S_n

diagramme λ 

suite de nombres $R_2, R_3, \dots$

Fixons une permutation $\sigma \in S_n$.

Problème

Exprimer caractère $\chi^\lambda(\sigma)$ en fonction des R_i.

- C'est un polynôme ;
- grâce aux résultats combinatoires précédents : les coefficients comptent certaines familles de graphes.

Fin de l'exposé

Merci pour votre attention.

Des questions ?