Approche duale des représentations du groupe symétrique.

P.E.C.
12/10/12

Valentin.

Plan : I. Représentations des groupes finis
Cas du groupe symétrique

II. Approche duale : fonctions "polynomiales" sur les diagramme de Young

III. Combinatoire des caractères normalisés et cartes

IV. Application : grands diagrammes aléatoires

---

① Représentat° des gpes finis

1] Définition et exemple

Déf : Soit G un groupe fini
Une représentation de G est un couple (ρ, V) où
- V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dim° finie
- $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ est un morphisme de groupes.

Ex :
- G un gpe quelconque. : représentation triviale.
$V = \mathbb{C}$
$\forall g \in G, \ \rho(g) = id$

- G un gpe quelconque : représentation régulière gauche
$V = \mathbb{C}[G]$. base $(e_g)_{g \in G}$
$\rho(g) \cdot e_{g'} = e_{g \cdot g'}$

- $G = S_n$: représentation géométrique de S_n
$V = \mathbb{C}^n$ base $(e_1, \dots, e_n)$
$\rho(\sigma) \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$ (à chq σ, on associe sa matrice de permutat°)

- $G = S_n$
$V = \mathbb{C}_{\leq d}[x_1, \dots x_n]$ (degré $\leq d$)
$\rho(\sigma)(x_i) = x_{\sigma(i)}$ (morphisme d'algèbre restreint aux degrés $\leq d$)

Avec $G = S_n$, plein d'exemples naturels

Motivation venant de la physique théorique.

Rq : Si (V, ρ) et (V', ρ') sont des rep. du m̂ gpe G, alors
- $(V \oplus V', \rho \oplus \rho')$ est une rep. de G
$(\rho \oplus \rho')(g) \cdot (v, v') = (\rho(g) \cdot v, \rho'(g) \cdot v')$

- produits tensoriels
- $(\mathrm{Hom}(V,V'), \mathrm{Hom}(\rho,\rho'))$ est une rep. de G

Pour $f : V \longrightarrow V'$ et $g \in G$

$$\mathrm{Hom}(\rho,\rho')(g)\cdot f = \rho'(g^{-1})\circ f\circ \rho(g)$$

2) Représentations irréductibles

Question : G est fixé. On veut "décrire" les représentat°s de G, à isomorphisme près.

déf : Morphisme de représentat°s

(V,ρ) et (V',ρ') deux rep. de G

$\varphi : V \longrightarrow V'$ est un G-morphisme si

$$\forall g\in G,\ \forall v\in V \quad \varphi(\rho(g)\cdot v) = \rho'(g)\cdot\varphi(v)$$

ie $\boxed{\varphi\circ\rho(g) = \rho'(g)\circ\varphi.}$ (*)

2] → On décrit des rep. qui ne se décomposent pas comme somme de rep.

Déf : Une représentation (V,ρ) est irréductible si elle ne peut pas s'écrire

$$(V_1,\rho_1)\oplus(V_2,\rho_2) \text{ avec } V_1\neq\{0\} \text{ et } V_2\neq\{0\}$$

le m̂

Rq : Si une représentat° (ρ, V) est réductible (ie n'est pas irréductible) alors elle a un sous-espace V_1 ($\neq\{0\}, V$) stable par tous les $\rho(g)$. et V_2 aussi (on dit juste stable)

Thm [Maschke] : c'est une équivalence, ie

Une rep. est irréductible ssi elle n'a pas de sous espace stable, hormis $\{0\}$ et V.

Rq : La preuve repose de façon cruciale sur le fait que G est fini.

Prop
dem avec (*)

Si $\varphi : (V,\rho) \longrightarrow (V',\rho')$ est un morphisme, alors

$\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \text{ tq } \varphi(v)=0\}$. $\varphi(v)=0 \Rightarrow \rho'(g)(\varphi(v))=0 \Rightarrow \varphi(\rho(g)(v))=0$.

- $\mathrm{Im}(\varphi)\subseteq V'$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)\subseteq V$ sont des s-espaces stables

$\mathrm{Im}(\varphi) = \{v' \text{ tq } \exists v\ \varphi(v)=v'\}$ $\rho'(g)(v') = \varphi(\rho(g)(v))$ donc $\mathrm{Im}(\varphi)$ stable par $\rho'(g)\ \forall g$.

- Si $(V,\rho) = (V',\rho')$, alors tous les sous-espaces propres de φ sont stables

$L = \{u : \varphi(u) = \lambda u\}$

$\varphi(u) = \lambda u.$ $\varphi(\rho(g)(u)) = \rho(g)(\varphi(u)) = \rho(g)(\lambda u) = \lambda\,\rho(g)(u)$

Csq : Lemme de Schur

↳ il y a peu de choix pour les morphismes entre deux irred.

Lemme de Schur : Si V et V' sont irréductibles, et $\varphi : V \to V'$ est un morphisme alors

- Soit V et V' sont isomorphes, soit $\varphi = 0$
- Si $V = V'$, alors $\varphi = c.\,\mathrm{id}$ pour un certain $c \in \mathbb{C}$.
  (utilise que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou tt corps algébriquem^t clos).

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, V') = \begin{cases} 1 \text{ si } V \simeq V' \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Rq : $\mathrm{Hom}_G(V,V')$ et $\mathrm{Hom}(V,V')$ et $\mathrm{Hom}(V,V')^G$ ne sont pas la m̂ chose !!

$\mathrm{Hom}_G(V,V')$ ↑ ens. des G-morphismes $\varphi : V \to V'$

$\mathrm{Hom}(V,V')$ ↑ applica$^{\circ s}$ linéaires de V ds V'.

$\mathrm{Hom}(V,V')^G$ ↑ les elts de la rep. $\mathrm{Hom}(V,V')$ qui sont fixes par tt $g \in G$.

3] Caractères

Déf Le caractère χ^ρ de (V,ρ) est $\chi^\rho : G \to \mathbb{C}$

$$g \longmapsto \underset{\text{trace}}{\mathrm{tr}}(\underbrace{\rho(g)}_{\text{matrice}})$$

Ex : rep. triviale : $\chi^{tr} \equiv 1$

rep. géom : $\chi^{geom}(\sigma) = \mathrm{tr}(\mathrm{Mat}(\sigma)) = \#$ pts fixes de σ

rep. régulière : $\chi^{reg}(g) =$ nb de g' tq $gg' = g'$

$$= \begin{cases} |G| \text{ si } g = \text{elt neutre } e \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Prop : $\chi^{\rho \oplus \rho'} \equiv \chi^\rho + \chi^{\rho'}$
C = pr tt $g \in G$

Rq : $\chi^\rho(h^{-1} g h) = \chi^\rho(g) \quad \forall\, g, h \in G$.

Car $\rho(h^{-1} g h) = \rho(h)^{-1} \rho(g) \rho(h)$ donc conjugué avec $\rho(g)$ donc ont la m̂ trace.

Déf : Fonction centrale = qui est constante sur ttes les classes de conjugaison (de G).

ex : χ^ρ

[✱] **Thm** : Les $(\chi^\rho)_{\rho \text{ irred}}$ forment une base orthonormée des fct$^{\circ s}$ centrales

clé

sur ttes les fct$^{\circ s}$ de G ds $\mathbb{C}$, mais on le regarde surtout sur les fct$^{\circ s}$ centrales.
sur quoi ce produit scalaire est-il défini ?

$$\langle f, f' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)\, f'(g^{-1})$$

ou $\overline{f'(g)}$, au choix

Conséquences

- Le nb de irrep (= rep. irred.) est le nb de classes de conjugaison du gpe G. donc $< \infty$.
- Tte rep. V peut s'écrire cô $V = V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \dots \oplus V_r^{m_r}$ où les V_i sont irred. et V_i n'est pas isomorphe à V_j.

On ne sait pas a priori si cette écriture est unique. (oui et non)

Le thm donne plus de résultats.

$$\chi^V = m_1 \chi^{V_1} + \dots + m_r \chi^{V_r}$$

Donc $m_i = \langle \chi^V, \chi^{V_i} \rangle$. Les m_i sont uniques !

⚠ Les multiplicités sont uniques, mais pas la décomposit° $V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{m_r}$ en tant que sous-espaces.

ici

$MFP(n,i)$ = # perms de taille n avec i pts fixes marqués.

$$\langle \chi^V, \chi^V \rangle = \sum_i m_i^2$$

Ex: $\langle \chi^{geom}, \chi^{geom} \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \#\text{pts fixes}(\sigma) \cdot \#\text{pts fixes}(\sigma^{-1})$

$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (\#\text{pts fixes}(\sigma))^2$ argument combinatoire ici

$= 2$

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \text{avec } k \text{ pts fixes}}} k^2 = MFP(n,1) + 2MFP(n,2)$$

$$\left[k^2 = k + 2\binom{k}{2} \right]$$ nb de fois que σ avec k pts fixes est compté

$= n \cdot (n-1)! + 2\binom{n}{2}(n-2)!$

$= n! + n(n-1)(n-2)!$

$= 2n!$

Donc $\sum m_i^2 = 2$ ie $\exists\, i_1, i_2$ tq $m_{i_1} = 1$, $m_{i_2} = 1$ ($i_1 \neq i_2$)

$m_i = 0 \quad \forall\, i \neq i_1, i_2$

Donc V^{geom} est la somme de deux rep. irred. non isomorphes.

$\mathbb{C}^n \supseteq \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n) \simeq V^{tr} \leftarrow$ rep. triviale de S_n
↳ stable

$\mathbb{C}^n = \text{Vect}(e_1 + \dots + e_n) \oplus \{ x = \sum x_i e_i \text{ tq } x_1 + \dots + x_n = 0 \}$ ↱ stable aussi

$\sum x_i e_i = \lambda(e_1 + \dots + e_n) + \sum y_i e_i$ avec $\sum y_i = 0$

Il suffit de retrancher $\frac{1}{n}\sum_i x_i = \lambda$ à x_i pr avoir y_i

Ex : Rep. régulière $\chi^{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$m_i = \langle \chi^{V_i}, \chi^{reg} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{reg}(g) \chi^{V_i}(g^{-1})$$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot |G| \cdot \chi^{V_i}(e) = \dim(V_i)$$

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_i V_i^{\dim(V_i)}$$

- Deux rep. qui ont le m̂ caractère ont les m̂ multiplicités donc

Prop : $\chi^{\rho} = \chi^{\rho'} \Rightarrow \rho \simeq \rho'$ (ρ est isomorphe à ρ')

(Rq : $\Leftarrow$ est évidente)

PEC
19/10/12 ⑤

Rappel : rep = morphisme de G ds $GL(V)$

rep irred : tq si $V_1 \subseteq V$ est stable par ts les $\rho(g)$, alors $V_1 = \{0\}$ ou V.

Il y a un nb fini de irrep. (pr G fini) = # classes de conjugaison de G

Caractère : $\chi^{\rho}(g) = tr(\rho(g))$

On va prendre (maintenant) $G = \mathfrak{S}_n$.

Questions : . décrire les rep. irred.
. calculer les caractères.

On répond à la 1re question en utilisant le $\boxed{\text{Symétriseur de Young.}}$

Prop : $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\rho \text{ irred}} V_\rho^{\dim(V_\rho)}$

En particulier, tte irred ρ correspond à un ss-espace stable de $\mathbb{C}[G]$.

Fixons une irrep.

$\boxed{\mathbb{C}[G] = V_\rho \oplus \dots}$ (mais cette écriture n'est pas unique)

On considère $\boxed{\varphi_\rho \text{ le projecteur sur } V_\rho}$

TODO $\Rightarrow$ φ_ρ est un G-morphisme. ie $\varphi_\rho \circ \rho(g) = \rho(g) \circ \varphi_\rho \quad \forall g \in G$

$\varphi_\rho \in Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$

Description de $Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$:

. gros sous-espace : pour $g \in G$, on définit $\boxed{r_g : e_{g'} \longmapsto e_{g'g}}$

r_g est une multiplicat° à droite, donc commute avec ttes les multiplication à gauche, et donc avec ts les $\rho(g)$.

Donc $\forall g \in G$, $r_g \in Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$

donc $\dim(Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])) \geq |G|$.

. $\dim(Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])) \underset{\text{pourquoi?}}{=} \langle \chi^{reg}, \chi^{reg} \rangle$

$= |G|$

Prop : $Hom_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G]) = Vect\{r_g,\ g \in G\}$

$= \{r_x,\ x \in \mathbb{C}[G]\}$

Ainsi $\boxed{\varphi_\rho = r_{p_\rho} \text{ où } p_\rho \in \mathbb{C}[G].}$

Rappel : $\varphi_e^2 = \varphi_e$. Donc $p_e^2 = p_e$.
(car φ_e est un projecteur

Conclusion : $\boxed{\text{Les rep irred de } G \text{ peuvent ê construites sous la forme } \mathbb{C}[G]\,p_e \text{ où } p_e \in \mathbb{C}[G] \text{ tq } p_e^2 = p_e}$

⚠ p_e n'est pas unique ! $(\mathrm{Im}(\varphi_e) = V_e)$ mais tt elt p tq $p=p^2$ ne convient pas!!
(mais il est déterminé quand le s.-espace stable V_e est fixé).

On se place maintenant dans $G = S_n$.

Rappel : # irrep = # classes de conjugaison ← caractérisée par les longueurs des cycles.
= # partitions de n.

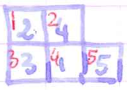
Dans le cas (très particulier) du gpe symétique, on peut associer une irrep à tte partit° de façon canonique.

Les rep. irred. (notées V_λ) sont indexées par les partitions λ de n (et c'est canonique, pour le gpe symétrique).

On fixe $\lambda \vdash n$.

On va a) → définir un $p_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$
b) → montrer que $p_\lambda^2 = p_\lambda$
c) → montrer que $\mathbb{C}[S_n]\,p_\lambda$ est irreductible.
d) → montrer que si $\lambda \neq \mu$ alors $\mathbb{C}[S_n]\,p_\lambda$ et $\mathbb{C}[S_n]\,p_\mu$ sont non-isomorphes.

a) Choisir un remplissage de λ $(=T)$ (ie un tableau de forme λ, avec aucune contrainte de croissance)

T = 

pour $\lambda_{ex} = (3,2)$ (notre exemple partout).

dépendent de $\underline{\underline{T}}$

$$\begin{cases} \cdot\ a_\lambda = \displaystyle\sum_{\sigma \in RS(T)} \sigma \\ \cdot\ b_\lambda = \displaystyle\sum_{\sigma \in CS(T)} \varepsilon(\sigma)\,\sigma \end{cases}$$

↑ permutations qui préservent les lignes du tableau
colonnes

↑ signature

$b_{\lambda_{ex}} = Id - (2,3) - (4,1) + (2,3)(1,4).$

$a_{\lambda_{ex}}$ = somme de 12 permutat°.

Rq : Si $\sigma \in RS(T)$, $a_\lambda \cdot \sigma = \sigma \cdot a_\lambda = a_\lambda$

Si $\tau \in CS(T)$, $b_\lambda \tau = \tau b_\lambda = \textcircled{\varepsilon(\tau)} b_\lambda$.

Lemme : $(a_\lambda b_\lambda)^2 = \alpha_\lambda a_\lambda b_\lambda$ pour un certain $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Donc $\boxed{p_\lambda = \frac{a_\lambda b_\lambda}{\alpha_\lambda}}$ est un projecteur. → ie $\boxed{p_\lambda^2 = p_\lambda}$ (qui dépend de T).

$p_\lambda^2 = \frac{(a_\lambda b_\lambda)^2}{\alpha_\lambda^2} = \frac{(a_\lambda b_\lambda)^2}{\alpha_\lambda} \cdot \frac{1}{\alpha_\lambda} = \frac{\alpha_\lambda b_\lambda}{\alpha_\lambda} = p_\lambda$.

b) Preuve du lemme. → Si $x = a_\lambda b_\lambda$

$$(*) \begin{cases} \sigma x = x \text{ pr tt } \sigma \in RS(T) \\ (\sigma a_\lambda) b_\lambda = a_\lambda b_\lambda = x \\ x \cdot \tau = \varepsilon(\tau) x \text{ pr tt } \tau \in CS(T). \\ a_\lambda (b_\lambda \tau) = a_\lambda (\varepsilon(\tau) b_\lambda) = \varepsilon(\tau) a_\lambda b_\lambda = \varepsilon(\tau) x. \end{cases}$$

C'est vrai aussi pour $x = (a_\lambda b_\lambda)^2$ $\sigma (a_\lambda b_\lambda)^2 = \sigma a_\lambda (b_\lambda a_\lambda b_\lambda) = a_\lambda (b_\lambda a_\lambda b_\lambda) = x$

$(a_\lambda b_\lambda a_\lambda) b_\lambda \tau = \varepsilon(\tau) (a_\lambda b_\lambda a_\lambda) b_\lambda = \varepsilon(\tau) x$

La prop $(*)$ caractérise $a_\lambda b_\lambda$ à un scalaire près (ceci démontrera le lemme qui) → ie aussi p_λ à un scalaire près

↓ preuve : Soit x qui vérifie $(*)$.

$x = \sum_{\pi \in S_n} c_\pi \pi$ | On montre que $x = c_{id}\, a_\lambda b_\lambda$.

coef. de $\sigma\tau$ dans ... $\sigma x \tau = \sum_{\pi \in S_n} c_\pi (\sigma \pi \tau)$

$\sigma \in RS(T)$
$\tau \in CS(T)$

$[\sigma\tau]\ \sigma x \tau = [id]\ x = c_{id}$ ok

$\qquad \shortparallel \qquad \shortparallel$

$[\sigma\tau]\ \varepsilon(\tau) x = \varepsilon(\tau)\, c_{\sigma\tau}$. ok

donc $c_{\sigma\tau} = \varepsilon(\tau)\, c_{id}$

on applique σ puis τ

π s'écrit $\textcircled{\sigma\tau}$ avec $\sigma \in RS(T)$ et $\tau \in CS(T)$ ssi il n'existe pas (i,j) avec m̂ colonne d'arrivée et m̂ ligne de départ. (voir T exemple : $(1,3)$ est un tel (i,j) donc π de $T \neq \sigma\tau$)

Rq : si π s'écrit $\sigma\tau$ avec $\sigma \in RS(T)$ et $\tau \in CS(T)$ alors cette écriture est unique. $\begin{cases} \sigma \text{ met les elts dans les bonnes colonnes, d'arrivée} \\ \tau \text{ ordonne les elts ds chq colonne.} \end{cases}$

Si il existe (i,j) avec m̂ colonne d'arrivée et m̂ ligne de départ,

$(i,j) \in RS(T)$ et $(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) \in CS(T)$

↳ voir ⓘ(ici)

(ici) dans $\pi(T)$, i et j sont ds la m̂ colonne. ds ds T, $\pi^{-1}(i)$ et $\pi^{-1}(j)$ st ds la m̂ colonne

$x = \sum c_\pi \pi$

$(i,j)\ x\ (\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) = -x$ (on utilise $(*)$).

$= \sum c_\pi (i,j) \pi (\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))$

$[\pi]$

$[\pi]\,((i,j) x (\pi^{-1}(i) \pi^{-1}(j))) = \Big[\underbrace{(i,j)}_{=(i,j)^{-1}}\ \pi\ \underbrace{(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j))}_{=(\pi^{-1}(i),\pi^{-1}(j))^{-1}}\Big]\ x = -\underbrace{[\pi]\ x}_{c_\pi}$

$\shortparallel \qquad \shortparallel$

$c_\pi = [\pi]\ x$.

alors

Donc $[\pi]\ x = 0$ ie $\boxed{c_\pi = 0}$

Fin : $x = c_{id} \sum_\sigma \sum_\tau \varepsilon(\tau) \sigma\tau$
$= c_{id} (\sum_\sigma \sigma)(\sum_\tau \varepsilon(\tau)\tau)$
$= c_{id}\ a_\lambda b_\lambda$ ■

Donc $(*)$ caractérise un espace de dim° 1.

donc $x = \sum_{\sigma \in RS(T)} \sum_{\tau \in CS(T)} \underbrace{c_{\sigma\tau}}_{= \varepsilon(\tau) c_{id}} \sigma\tau$ ■

Rq : $p_\lambda y p_\lambda = \alpha_y p_\lambda$ pour $\alpha_y \in \mathbb{C}$ $\quad \forall y \in \mathbb{C}[S_n]$

(car vérifie $\underset{\text{ok}}{(*)}$) $\quad \sigma . p_\lambda y p_\lambda = (\overbrace{\sigma a_\lambda}^{a_\lambda}) . \frac{b_\lambda}{\alpha_\lambda} y p_\lambda = p_\lambda y p_\lambda$

$p_\lambda y p_\lambda z = p_\lambda y z \frac{a_\lambda}{\alpha_\lambda} \underbrace{(b_\lambda z)}_{=\varepsilon(z) b_\lambda} = p_\lambda y p_\lambda$

c) **Lemme** : $\mathbb{C}[S_n] p_\lambda$ est irreductible. Notat° : $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] p_\lambda$

Preuve : Soit W un sous-espace stable de V_λ.

Alors W s'écrit $W = \mathbb{C}[S_n] p_W$ pour un certain $p_W \in \mathbb{C}[S_n]$ tq $p_W^2 = p_W$.

(car W est lui aussi un s-espace stable de $\mathbb{C}[S_n]$) ⟶ ⇑ ?

$W \subseteq V_\lambda$. Donc $p_W = x_W p_\lambda$ pour $x_W \in \mathbb{C}[S_n]$.

On regarde $p_\lambda \cdot p_W$

$p_\lambda \cdot p_W = p_\lambda x_W p_\lambda = \alpha_W p_\lambda$ avec $\alpha_W \in \mathbb{C}$ $\quad$ par la rq ci-dessus

* si $\alpha_W = 0$, $\overbrace{x_W p_\lambda}^{p_W} \underbrace{p_\lambda p_W}_{0} = 0$ et donc $W = \{0\}$.

$$\begin{matrix} \shortparallel \\ p_W = p_W^2 \end{matrix}$$

* si $\alpha_W \neq 0$, $p_\lambda \in W$ $\quad$ car $p_\lambda = \frac{1}{\alpha_W} p_\lambda \cdot p_W$

Comme W est stable, $\rho(\sigma) p_\lambda \in W \quad \forall \sigma \in S_n$ $\quad$ à revoir

$\rho(\sigma) \cdot p_\lambda = \sigma . p_\lambda$?

donc $\mathbb{C}[S_n] p_\lambda \subseteq W$.

d) **Lemme** : V_λ et V_μ sont non-isomorphes.

Preuve : (on saute)

Ccl : On a construit toutes les irrep. de S_n.

On peut utiliser cette construction pour calculer les caractères.

Ceci est une méthode alternative au calcul des caractères.

La méthode classique est la formule de Frobenius (liée aux fct° symétriq),

La méthode qu'on verra la semaine prochaine consiste à calculer la trace de $\rho(\sigma)$ sur V_λ.

Rq / Ex : $\lambda = \boxed{\;\,|\;|\;|\;|\;|\;\,}$ $\quad a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$ $\quad b_\lambda = \mathrm{id}$ $\quad p_\lambda = \boxed{\frac{1}{n!}} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma$

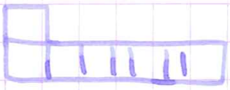
ce facteur est difficile à calculer pr des ex plus généraux

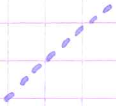
$\mathbb{C}[S_n] p_\lambda = \mathbb{C} p_\lambda$ ⟶ espace de dim° 1

$\sigma \in S_n$ $\quad \sigma . p_\lambda = p_\lambda$ ⟶ action triviale

<u>Ex</u> :  → act° triviale

 → la signature

 → géométrique \ triviale. (dim° = n-1).

<u>Prop</u> : La symétrie par rapport à  ajoute une signature.

PEC. 26/10/12 (dans cette séance $\tau\sigma = \tau\circ\sigma$.)

<u>Rappel</u> : Construction des rep. du groupe symétrique $G = S_n$.

Soit $\lambda \vdash n$. On choisit T un remplissage (arbitraire) de λ.

Ex : $\begin{array}{|c|c|c}\hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline\end{array}$

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in RS(T)} \sigma$$

$$b_\lambda = \sum_{\tau \in CS(T)} \varepsilon(\tau).\tau$$

$p_\lambda \in \mathbb{C}[S_n]$

$p_\lambda = p_\lambda^2$

On a vu que $\exists\ \alpha_\lambda \in \mathbb{C}^*$ tq $p_\lambda = \alpha_\lambda a_\lambda b_\lambda$ est un projecte

$\boxed{V_\lambda \simeq \mathbb{C}[S_n]\, p_\lambda}$ est un s-espace de $\mathbb{C}[S_n]$

qui est stable pour la rep. régulière ($\equiv$ multiplicat° à gche)

V_λ est une rep : $\rho(\sigma).(x p_\lambda) = \sigma.x.p_\lambda$

<u>Thm</u> : V_λ est une rep. irréductible.

<u>Rq</u> : V_λ dépend du remplissage T de λ, mais en changeant T on obtient un "autre V_λ" qui est isomorphe à V_λ

<u>Thm</u> : Si $\lambda \neq \mu$, V_λ et V_μ sont non-isomorphes.

<u>Objectif du jour</u> : Calcul des caractères χ^λ ie

de $\boxed{\chi^\lambda(\pi) = tr_{V_\lambda}(\rho(\pi))}$.

$\lambda \vdash n$
$\pi \in S_n$

1° difficulté : trouver une base de $\mathbb{C}[S_n]\,p_\lambda$.

$\mathbb{C}[S_n]\,p_\lambda$ est engendré par $\sigma.p_\lambda$ mais ces σp_λ ne sont pas indépendants.

Ⓐ Une première formule pour les caractères

Déf : $\varphi_{\lambda,\pi} : \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$

$$x \longmapsto \pi \cdot x \cdot p_\lambda$$

Lemme $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}[S_n]}(\varphi_{\lambda,\pi}) = \operatorname{tr}_{V_\lambda}(\rho(\pi))$

(?) 1 = neutre de $\mathbb{C}[S_n]$ pour la multiplicat.

? **Preuve** : $\mathbb{C}[S_n] = \mathbb{C}[S_n] \cdot p_\lambda \oplus \mathbb{C}[S_n] \cdot (1-p_\lambda)$

(car p_λ est un projecteur)

$$\varphi_{\lambda,\pi}\Big|_{\mathbb{C}[S_n]\cdot p_\lambda} = \rho(\pi) \quad (\text{car } p_\lambda = p_\lambda^2)$$

$$\varphi_{\lambda,\pi}\Big|_{\mathbb{C}[S_n]\cdot(1-p_\lambda)} = 0$$

car $\varphi_{\lambda,\pi}(x \cdot (1-p_\lambda)) = \pi \cdot x \cdot (1-p_\lambda) \cdot p_\lambda$

$= \pi \cdot x \cdot p_\lambda - \pi x p_\lambda p_\lambda = 0 \quad \forall x$

Donc $\operatorname{tr}(\varphi_{\lambda,\pi}) = \operatorname{tr}(\rho(\pi))$.

Calcul de $\chi^\lambda(\pi)$: (avec le lemme : dans $\mathbb{C}[S_n]$, dont on a une base)

$$\chi^\lambda(\pi) = \operatorname{tr}(\varphi_{\lambda,\pi})$$

$$= \alpha_\lambda \sum_{\sigma \in RS(T)} \sum_{\tau \in CS(T)} \varepsilon(\tau) \operatorname{tr}(\overset{\in \mathbb{C}[S_n]}{x} \longmapsto \pi \cdot x \cdot \sigma \cdot \tau)$$

permute la base (e_g) de $\mathbb{C}[S_n]$

$\pi \cdot e_g = e_{\pi \cdot g}$

matrice de dim° $n! \times n!$, qui est une matrice de perm.

$$= \alpha_\lambda \sum_{\sigma \in RS(T)} \sum_{\tau \in CS(T)} \varepsilon(\tau) \, (\# \text{pts fixes de } x \longmapsto \pi \cdot x \cdot \sigma \cdot \tau)$$

$$= \alpha_\lambda \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \varepsilon(\tau) \sum_{g \in S_n} \delta_{\underbrace{g = \pi \cdot g \cdot \sigma \cdot \tau}_{\Updownarrow}} \begin{cases} 1 \text{ si } g = \pi g \sigma \tau \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$g = \pi g \sigma \tau \Leftrightarrow g \tau^{-1} \sigma^{-1} g^{-1} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \pi = \underbrace{g \tau^{-1} (g^{-1}}_{\text{"}\tau'\text{"}} \underbrace{g) \sigma^{-1} g^{-1}}_{\text{"}\sigma'\text{"}}$

Ex : $\tau = \tau^{-1} = (1,2) \in CS(T)$

$g \tau^{-1} g^{-1} = (g(1)\, g(2)) \in CS(g(T))$

Rq : $\sigma \in CS(T) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in CS(T)$

$\tau \in RS(T) \Leftrightarrow \tau^{-1} \in RS(T)$

Donc $$\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\alpha_\lambda} = \sum_{g\in S_n} \sum_{\sigma' \in RS(g(T))} \sum_{\tau' \in CS(g(T))} \boxed{\varepsilon(\tau')}\ \delta_{\pi = \tau'\sigma'}$$

$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau^{-1}) = \varepsilon(g\tau^{-1}g^{-1})\ \forall g.$

$$= \sum_{T \text{ remplissage}} \sum_{\sigma \in RS(T)} \sum_{\tau \in RS(T)} \varepsilon(\tau)\ \delta_{\pi = \tau\sigma}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) . \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

où $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = \# \left\{ T : \begin{array}{l} \sigma \in RS(T) \\ \tau \in CS(T) \end{array} \right\}$

Calcul de α_λ :

Pour $\pi = id$

$\dim(V_\lambda)$ = dim° de la rep. irred. associée à λ.

$$\chi^\lambda(id) = tr_{V_\lambda}\Big(\overbrace{\rho(id)}^{\text{neutre de } GL(V_\lambda)}\Big) = \dim(V_\lambda)$$

$$\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\alpha_\lambda} = \frac{\overset{\dim(V_\lambda)}{\overset{\shortparallel}{\dim(\lambda)}}}{\alpha_\lambda}$$

et $$\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\alpha_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \tau = \sigma^{-1}}} \varepsilon(\tau)\ \tilde{N}_{\sigma,\sigma^{-1}}(\lambda)$$

On cherche T tq $\left\{ \begin{array}{l} \sigma \in RS(T) \text{ et } \sigma^{-1} \in CS(T) \\ \phantom{\sigma \in RS(T) \text{ et }} \Updownarrow \\ \phantom{\sigma \in RS(T) \text{ et }} \sigma \in CS(T) \end{array} \right\}$ cette condit° implique $\sigma = id$

donc $$\tilde{N}_{\sigma,\sigma^{-1}}(\lambda) = 0 \text{ si } \sigma \neq id$$
$$= n! \text{ si } \sigma = id$$

donc $\dfrac{\dim(\lambda)}{\alpha_\lambda} = n!$ c'à d $\alpha_\lambda = \dfrac{\dim(\lambda)}{n!}$

Donc :

Prop : $$\frac{n!}{\dim(\lambda)} \chi^\lambda(\pi) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\ \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

Ⓑ Réduire l'ensemble de sommation

$$\pi \in S_k \subseteq S_n \quad (k \leq n)$$

(ie $\pi(j) = j \quad \forall j > k$)

Déf : Si $\sigma, \tau \in S_k$, $\lambda \vdash n$ $(k \leq n)$

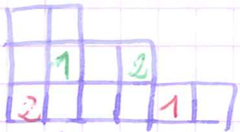
$\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) := \# \Big\{ f : \{1, \dots, k\} \longrightarrow \lambda$ injective tq :

vu cō ensemble de cases.

$(*) \left\{ \begin{array}{l} f(i) \text{ et } f(\sigma(i)) \text{ st ds la m̂ ligne} \\ f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ st ds la m̂ colonne} \end{array} \right. \Big\}$

Rq : ceci étend la déf. de $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$ que l'on avait pr $k=n$.

Ex : $\tilde{N}_{(12),id}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i(\lambda_i - 1)$ $\lambda =$
($k=2$)



(ie choix ordonné de 2 cases de la m̂ ligne)

La prop à la fin de Ⓐ se simplifie en :

Prop : $\boxed{\underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{\text{à la place de } n!} \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \underbrace{S_k}_{\text{à la place de } n} \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) \quad (\text{pour } \boxed{\pi \in S_k \subseteq S_n})}$

Preuve : on sait que

$$n! \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

* cas où Support (σ) et Support (τ) $\subseteq \{1,\dots,k\}$.

ie $\forall i > k \quad \sigma(i) = \tau(i) = i$

donc $f : \{1,\dots,n\} \to \lambda$, injective vérifiant (*) est la m̂ chose que $f : \{1,\dots,k\} \to \lambda$, injective vérifiant (*) complété par $\overset{*}{S_{n-k}}$ de $k+1$ à n.

donc $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = (n-k)!\, \tilde{N}_{\sigma|_{\{1..k\}},\tau|_{\{1..k\}}}(\lambda)$

* cas où Support (σ) $\not\subseteq \{1,\dots,k\}$

$\exists\, i > k$ tq $\underset{j}{\underset{\shortparallel}{\sigma(i)}} \neq i$ car $\pi(i) = i$ puisque $i > k$

Ceci implique que $\tau(\sigma(i)) = i$ donc $\tau(i) \neq i$

Ainsi, ce cas couvre aussi Support (τ) $\not\subseteq \{1,\dots,k\}$.

En fait, si $\sigma(i) = j$ alors $\tau(j) = i$ $\quad \tau(j) = \tau(\sigma(i)) = \pi(i) = i$

Donc $f(i)$ et $f(j)$ sont à la fois de la m̂ ligne et de la m̂ colonne. donc $f(i) = f(j)$ Ce qui contredit que f est injective.

Dans ce cas, $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = 0$

Donc $$n! \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_n \\ \tau\sigma = \pi \\ \text{Supp}(\sigma) \text{ et } \text{Supp}(\tau) \subseteq \{1,\dots,k\}}} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

En posant $\bar{\sigma} = \sigma|_{\{1,\dots,k\}}$ on obtient

et $\bar{\tau} = \tau|_{\{1,\dots,k\}}$

$$n! \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\bar{\sigma},\bar{\tau}\in S_k \\ \bar{\tau}\bar{\sigma}=\pi}} \underbrace{\varepsilon(\bar{\tau})}_{\overset{\shortparallel}{\varepsilon(\tau)}} \tilde{N}_{\bar{\sigma},\bar{\tau}}(\lambda)\,(n-k)!$$

■

Ex : $\pi = (1\ 2)$

$\sigma = (1\,2)$ et $\tau = id$ $\quad \tilde{N}_{(12),id}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(\lambda_i - 1)$ ← taille de la i^e ligne

$\sigma = id$ et $\tau = (12)$ $\quad \tilde{N}_{id,(12)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell'} \lambda'_i(\lambda'_i - 1)$ ← taille de la i^e colonne (ie de la i^e ligne de la partit° conjugée λ')

$$\text{Donc}\quad n(n-1)\frac{\chi^\lambda((12))}{\dim(\lambda)} = \sum \lambda_i(\lambda_i-1) - \sum \lambda'_i(\lambda'_i-1)$$
$$= \sum \lambda_i^2 - \sum \lambda_i'^2 + |\lambda| - |\lambda|$$

Cet ex était connu avant les $\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$, mais pas trivial.

ⓒ Oublier l'injectivité

Déf : $N_{\sigma,\tau}(\lambda) := \# \{ f : \{1,\dots,k\} \to \lambda \text{ tq } (*) \begin{cases} f(i) \text{ et } f(\sigma(i)) \text{ st de la } \hat{m} \text{ ligne} \\ f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ ——— colonne} \end{cases} \}$

Thm : $\pi \in S_k \subseteq S_n$

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in S_k \\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

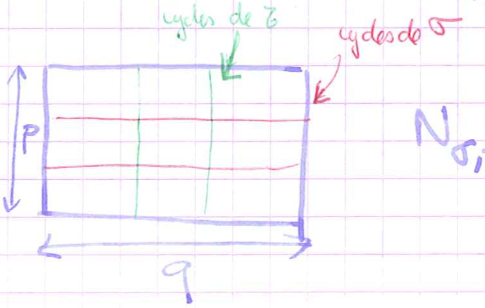
pas de ∼ ↙

ie le thm reste vrai si on enlève la condit° d'injectivité

idée de la preuve : une fct° non injective est comptée avec un coef 0.

Rq : sur l'ex, le thm donne directt $\sum \lambda_i^2 - \sum \lambda_i'^2$.

Ex : $\lambda = p \times q :=$



$$N_{\sigma,\tau}(p \times q) = p^{|C(\sigma)|}\, q^{|C(\tau)|}$$

↑ Nb de cycles de σ ↑ … de τ

PEC.
9/11/2012.

On explique pourquoi le thm suivant est utile pour le calcul des caractères :

Thm (rappel) : $\pi \in S_k \subseteq S_n \qquad k \leq n$

$d \vdash n$

$$\underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)\,\frac{\chi^d(\pi)}{\dim(d)}}_{\text{on note cette quantité } Ch_\pi(d)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \tau.\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{\sigma,\tau}(d).$$

Rq : $Ch_\pi(d)$ est défini sur tous les d :
→ vaut 0 si $|d| < k$
→ cs indiqué ci-dessus si $|d| \geq k$

2 intérêts de la formule :

→ descript° de l'ens. de sommat° avec des cartes

→ $N_{\sigma,\tau}(d)$

Ⓐ. Factorisations et cartes

Une paire de permutations de S_k peut ê représentée cs un graphe biparti (certains préfèrent dire hypergraphe) à k arêtes étiquetées avec $\{1, \dots, k\}$ muni d'un système de rotation.

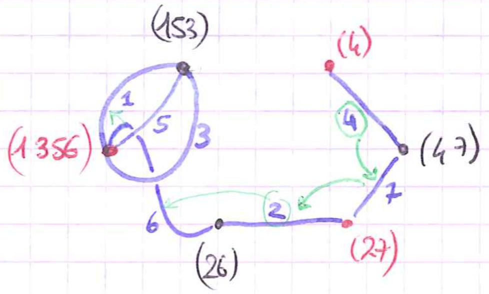
veut plutôt dire ici

et m̂ bicolorié ie la bicoloration est fixée.

Rq : Le graphe n'est pas forcém^t connexe, c'est pourquoi on ne parle pas de carte. Mais il s'agit d'une union de cartes.

Ex : $\sigma = (153)(26)(47)$
$\tau = (1356)(27)(4)$

● = cycles de σ
● = cycles de τ



Rq : on écrit les étiquette à gauche en allant de ● vers ●

$\pi = \tau.\sigma$

Les arêtes relient i à i $\forall i$.

<u>Rq</u> : Les cycles qui étiquettent les sommets peuvent ê retrouvés à partir de l'étiquetage des arêtes.

<u>Intérêts</u> :
- $N_{\sigma,\tau}$ ne dépend que du graphe simple sous-jacent (on peut oublier les arêtes multiples et le système de rotation) (→ voir après).
- On peut lire $\underline{\tau.\sigma}$ sur la "carte"
  ↳ on applique σ puis τ

<u>Ex</u> (suite) : $\tau\sigma = (4\ 2\ 1\ 6\ 7)\ (5)\ (3)$

Pour calculer $\tau\sigma$, on parcourt(*) les arêtes en en comptant une sur 2

Avec la convent° "étiquette à gche" il suffit de parcourir les arêtes ds le sens ↶ et de noter les étiquettes rencontrées.

↳(*) en partant d'un <u>sommet rouge</u> (cō ça on tourne autour d'un noir (ie σ) la 1e fois)

<u>Prop</u> : cycles de σ = faces de la "carte".

Cas particulier $\pi = C := (1\ 2 \dots k)$

$\{\sigma, \tau \in S_k \text{ tq } \tau\sigma = \pi\} \longleftrightarrow$ (☆) $\left\{\begin{array}{l}\text{cartes biparties avec } k \text{ arêtes,} \\ \text{et enracinées, et unicellulaires}\end{array}\right\}$

→ connexes, en particulier

↓ car $\pi = (1\,2 \dots k)$

Car connaissant $\tau\sigma$, choisir l'arête 1 équivaut à choisir tout l'étiquetage.

<u>Rappel</u> : $N_{\sigma,\tau}\big(\underbrace{(q, q, \cdots, q)}_{\substack{p \text{ parts, toutes} \\ \text{égales à } q}}\big) = p^{\overset{\text{nb de cycles}}{|C(\sigma)|}} q^{|C(\tau)|}$

<u>Rq</u> : $\varepsilon(\tau) = (-1)^{\overset{k}{\overset{\parallel}{|\tau|}} - \#\text{ cycles de } \tau}$

$$Ch_C\big((q, \dots, q)\big) = (-1)^k \sum_{M \text{ carte } (☆)} (-1)^{|V_r(M)|} p^{|V_n(M)|} q^{|V_r(M)|}$$

V_r et V_n désignent le nb de sommets rouges et noirs de la carte.

$$= (-1)^k k! \sum_{r,s \geq 1} \binom{k-1}{r-1,\ s-1,\ k+1-r-s} \binom{p}{r} \binom{-q}{s}$$

[Jackson, 1988]

↳ démontrée en utilisant la théorie des rep. du gpe sym

Rq : la méthode de Jackson, bien que reposant sur les m̂ outils, est très différente de ce qui est présenté ds ce cours

Par ex, il utilise la formule

$$\# \text{cartes} \ldots (\star) = \sum_{\lambda \vdash n} \ldots \frac{\chi^\lambda(\mu)\chi^\lambda(\nu)\chi^\lambda(\rho)}{\dim(\lambda)}$$

Le lien entre les 2 approches est assez mystérieux...

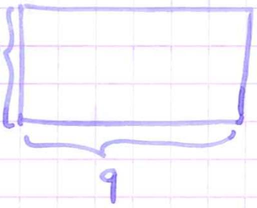
Ⓑ - Fonctions $N_{\sigma,\tau}$

λ est vu cō un ens. de cases.

Rappel : $N_{\sigma,\tau}(\lambda) = \#\{ f : \{1, .., k\} \longrightarrow \lambda \text{ vérifiant la condit } (*)_f \}$

$$\boxed{(*)_f : \begin{cases} \forall i, & f(i) \ \& \ f(\sigma(i)) \text{ st ds la } \hat{m} \text{ ligne de } \lambda \\ \forall i, & f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ st ds la } \hat{m} \text{ colonne de } \lambda \end{cases}}$$

Cas particulier $\lambda = p \times q =$



(p parts ttes = à q)

Soit f vérifiant $(*)_f$. On peut définir une fonction h_r

$$\boxed{h_r : \underset{\text{ens des cycles de } \sigma}{C(\sigma)} \longrightarrow \underset{\text{ens des lignes de } \lambda}{R(\lambda)}}$$

et une fonction $\boxed{h_c : \underset{\text{ens des cycles de } \tau}{C(\tau)} \longrightarrow \underset{\text{ens des colonnes de } \lambda}{Col(\lambda)}}$

[En effet deux élts ds le m̂ cycle de σ (resp τ) sont envoyés ds la m̂ ligne (resp colonne) de λ.]

Réciproquement, connaissant deux telles fonctions h_r et h_c, on définit $f(i) := (h_r(c_1), h_c(c_2))$

où c_1 est le cycle de σ contenant i
et c_2 ______ τ ______.

Alors f vérifie (*)

Ainsi, pour $\lambda = p \times q$, on a une biject° entre les f vérifiant $(*)_f$ et les couples (h_r, h_c).

Corollaire : $N_{\sigma,\tau}(p \times q) = p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|}$

(qu'on retrouve)

Si λ n'est pas un rectangle :

en suivant la m̂ définition, $f(i) := (h_r(c_1), h_c(c_2))$ peut se retrouver hors du diagramme! On ajoute des condit^{os} sur h_r et h_c pour éviter ça.

déf : Un couple (h_r, h_c) vérifie $(*)_h$ si

$\forall i \atop 1 \leq i \leq k$ $\quad (h_r(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda$ $\qquad$ c_1 le cycle de σ contenant i
c_2 —— τ ——

ie $\boxed{\left.\begin{array}{l}\forall\ c_1 \in C(\sigma),\ \forall\ c_2 \in C(\tau) \text{ tq } c_1 \cap c_2 \neq \varnothing \\ (h_r(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda .\end{array}\right\} (*)_h}$

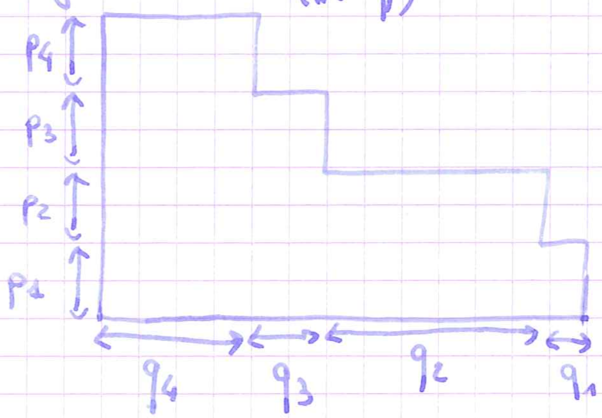
Lemme : Pour λ général, il y a une $\boxed{\text{bijection}}$ entre
$\{ f \text{ vérifiant } (*)_f \}$ et $\{ h = (h_r, h_c) \text{ vérifiant } (*)_h \}$

Ⓒ. Coordonnées multi-rectangulaires

Pour profiter des formules simples sur les rectangles, on voit tt diagramme cō une superposition de rectangles.

À deux suites $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ et $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_m)$ d'entiers positifs, on associe un diagramme $\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ cō ceci :

$\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q}) =$
(pr $m = 4$ ici)

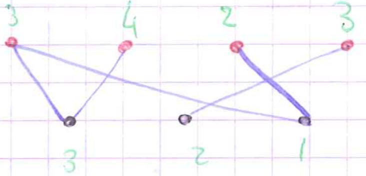


Prop : $$N_{\sigma,\tau}(\lambda(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \sum_{\varphi \text{ tq } (\heartsuit)} \prod_{\bullet \in V_\bullet(G)} p_{\varphi(\bullet)} \prod_{{\color{red}\bullet} \in V_{\color{red}\bullet}(G)} q_{\varphi({\color{red}\bullet})}$$

$\uparrow$
nb de (h_r, h_c) vérifiant $(*)_h$

$\sigma, \tau \rightsquigarrow$ graphe simple sous-jacent à la "carte" précédemment définie. → noté $G(\sigma,\tau) = G = (V_G, E(G))$

(ex)



$C(\tau)$

$C(\sigma)$

$p_1p_2p_3q_2q_3^2q_4$

$$(c_1,c_2) \in E(G(\sigma,\tau)) \Leftrightarrow c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$$

↑ les arêtes du graphe.

(☺) $\Big\{ \varphi : V_G \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ "croissante"

i.e. si $(c_1,c_2) \in E(G)$, $\varphi(c_1) \leq \varphi(c_2)$

noir ↑ ↑ rouge.

Rq : Cette somme pr $N_{\sigma,\tau}(\lambda(p,q))$ est à rapprocher de la déf. suivante :

déf $F_G(x_1, x_2, x_3, \dots) = N_G(\lambda(p,q)) \Big|_{\substack{p_i = x_i \\ q_i = x_i}}$

série génératrice multivariée des fonctions croissantes.

→ on note $N_G = N_{\sigma,\tau}$, vu que $N_{\sigma,\tau}$ ne dépend que du graphe sous-jacent

PEC.
16/11/2012

Rappels : $\pi \in S_k$ et $\lambda \vdash n$. On note μ := type.cyclique(π)

dépend de μ plutôt que de π car caractères constant sur classes de conjugaison

$$* \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{\boxed{\chi^\lambda(\pi)}}{\dim(\lambda)}}_{\text{noté } Ch_\mu(\lambda)}$$

. si $k \leq n$ $\pi \in S_k \subseteq S_n$

donc $\chi^\lambda(\pi)$ "a du sens"

. si $k > n$, $n(n-1)\dots(n-k+1) = 0$

et on définit $Ch_\mu(\lambda) := 0$.

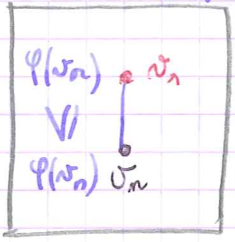
* Si G est un graphe biparti $(V_G = V_n \uplus V_r)$

↑ sommets noirs ↑ sommets rouges

(avec les sommets rouges au-dessus des noirs)

$$\boxed{N_G(\lambda(p,q)) = \sum_{\substack{\varphi : V_G \to \mathbb{N}^* \\ \text{croissante}}} \prod_{v_n \in V_n} p_{\varphi(v_n)} \prod_{v_r \in V_r} q_{\varphi(v_r)}}$$

[ie si $(v_n, v_r) \in E(G)$, $\varphi(v_n) \leq \varphi(v_r)$]



On voit Ch_μ et N_G cô $\in \underbrace{\mathcal{F}(\mathbb{Y}, \mathbb{C})}_{}$

ens. des fonctions des diagrammes de Young $\mathbb{Y}$ (de ttes les tailles) dans $\mathbb{C}$.

Thm (rappel)

$\pi \in S_k$, de type cyclique μ

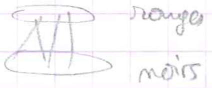
$$\boxed{Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \sigma . \tau = \pi}} \varepsilon(\tau) \, N_{G_{\sigma,\tau}}}$$

(égalité en tant que fonctions de $\mathbb{Y}$ dans $\mathbb{C}$, ie $\forall \lambda$...)

Objectif du jour : Voir Ch_μ et N_G cô fcts de $\mathbb{Y} \to \mathbb{C}$.
On regarde les $\mathbb{Q}$-algèbres de $\mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ engendrées par les Ch_μ d'une part, et par les N_G d'autre part.

Ⓐ- Algèbre $\mathrm{Vect}(N_G)$.

G : bicolorié



- Déjà, $\mathrm{Vect}(N_G)$ est bien une algèbre, ie est stable par multiplicat° :

Rq : $N_G . N_{G'} = N_{G \uplus G'}$

Cor : $\mathrm{Vect}(N_G)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{Y}, \mathbb{C})$

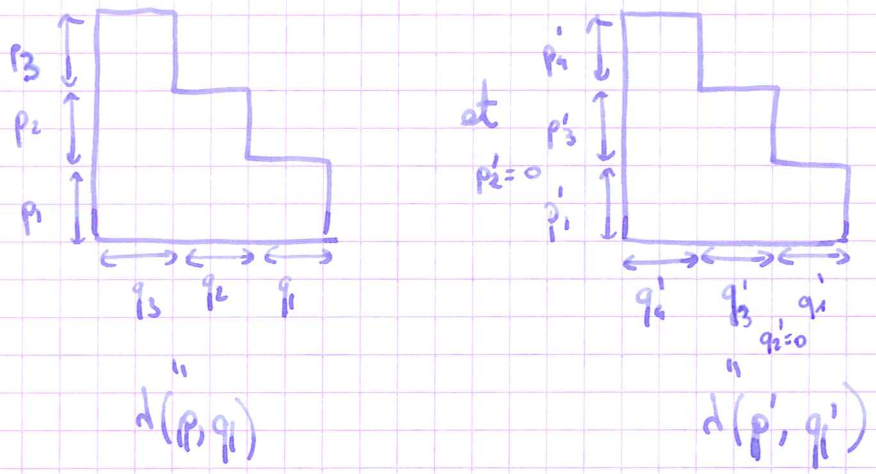
$N_G(\lambda(p,q))$ est un $\underbrace{\text{"polynôme"}}_{}$ en p et q.

en fait, cô il y a un nb infini de variables, mais $\forall$ l'ens. fini de variables auquel on se restreint, on a un polynôme.
(c'est le sens de "polynôme", que l'on pourrait définir formellemt)

- <u>Prop</u> : $\{ F \in \mathcal{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$ tq $F(d(p_i,q_i))$ est un polynôme$\}$
  $= \mathrm{Vect}\,(N_G)$.

justifie que "$\mathrm{Vect}(N_G)$" objet naturel à étudier

Plusieurs suites (p_i,q_i) correspondent au m̂ diagramme :

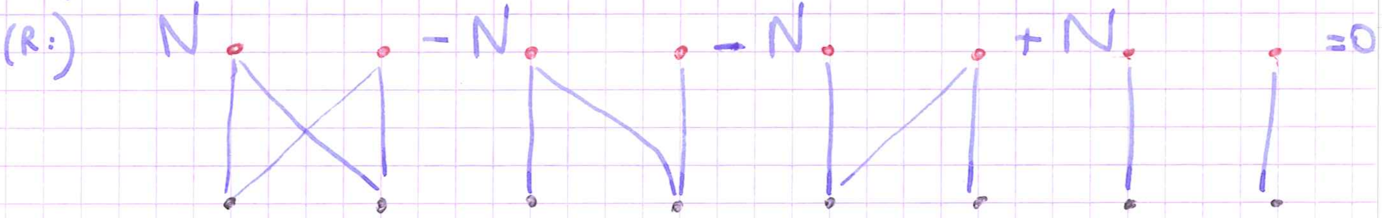


On cherche donc les fct^os qui sont ctes sur les suites (p_i, q_i) qui sont associées au m̂ diagramme.
(Ceci est l'idée de la preuve, qu'on ne fait pas).

- quelles sont les relations entre les N_G ?

<u>Prop</u> :

(R :)



<u>Preuve</u> :

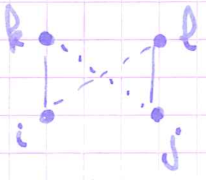
$$N_G = \sum_{\varphi : V_G \to \mathbb{N}^*} \delta_{\varphi \text{ croissante}} \underbrace{\prod p_{\varphi(v_n)} \prod q_{\varphi(v_r)}}_{\text{monome noté } M_\varphi}$$

ainsi, m̂ ens. de sommet pr chacun des 4 graphes ci-dessus

contribut° d'une fct° donnée φ au L.H.S. de (R) :

$$M_\varphi \cdot \left(\delta_{\substack{\varphi \text{ croissante} \\ \text{sur } \bowtie}} - \delta_{\substack{\varphi \text{ croissante} \\ \text{sur } N}} - \delta_{\substack{\varphi \text{ croissante} \\ \text{sur } И}} + \delta_{\substack{\varphi \text{ croissante} \\ \text{sur } ||}} \right)$$

La fct° φ correspond à "l'étiquetage"



des sommets.

. Si $i > k$ (ou si $j > \ell$), tous les $\delta_{\varphi \text{ croissante}}$ sont nuls !
donc la contribut° totale est nulle

. Si $i \leqslant \ell$, $\underset{\text{sur } \bowtie}{\delta_{\varphi \text{ croissante}}} = \underset{\text{sur N}}{\delta_{\varphi \text{ croissante}}}$

la condit° ↑ sur l'arête

est tjs satisfaite

$\underset{\text{sur И}}{\delta_{\varphi \text{ croissante}}} = \underset{\text{sur } ||}{\delta_{\varphi \text{ croissante}}}$

. Si $j \leqslant k$, de m̂ $\delta_{\bowtie} = \delta_{И}$

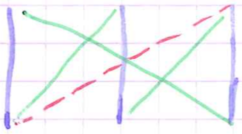
et $\delta_{N} = \delta_{||}$

. Sinon $i \leqslant k < j \leqslant \ell < i$, $\perp$. ∎

Obs : Plus généralem^t, la relation (R) est encore vraie si on ajoute à chacun des 4 graphes les m̂ sommets et/ou les m̂ arêtes.
↳ possiblem^t parmi les sommets du cycle.
et/ou si on considère des cycles plus longs à la place de $i - k - j - \ell - i$.
↓ cô p. ex.

Détails (du 2^e pt) pour trouver les $\pm N_G$ à mettre ds la somme, on fait une inclusion/exclusion sur "une arête sur deux".

Ex :

pr G = , la relat° (R) devient :

$$N_G - \sum N_{G'} + \sum N_{G''} - N_{|||} = 0$$

G' obtenu en enlevant une arête verte à G

G'' obtenu en enlevant 2 arêtes vertes à G. ∎

l'observation formalisée
↓

Prop : Soit G un graphe biparti, et C un cycle de G. (donc C est de longueur paire).
Soit E l'ensemble formé d'une arête sur 2 dans C.
(il y a 2 choix possibles pour E).
Alors
$$\boxed{\sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} N_{G \setminus E'} = 0 .}$$

Appelée : Relation d'inclusion/exclusion cyclique

Prop : $\mathrm{Vect}(G) \big/ \text{induso-excluso cyclique} \simeq \mathrm{Vect}(N_G)$

← quotientée par les relat°s

algèbre formelle sur les graphes bipartis

autrem^t dit : il n'y a pas d'autres relations que les combinaisons linéaires des relat°s d'incluso-excluso cyclique. (*)

Rappel de notat° : $F_G = N_G(p,q)\Big|_{\substack{p_i = x_i \\ q_i = x_i}}$

La prop ci-dessus est encore vraie pr les F_G.

On peut m̂ relâcher la contrainte "biparti" en "graphe orienté acyclique" (ça suffit pr définir la notion de φ croissante).

Ex : F  $= \sum_{i,j \leq k \leq l} x_i x_j x_k x_l$.

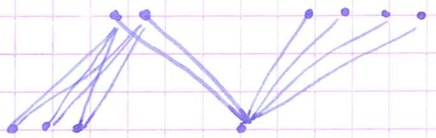
Cette prop est assez robuste car le noyau de $\mathrm{Vect}(F_G)$ est encore donné pr des relat°s d'incluso excluso cyclique.

idée de la preuve de (*)

Pour un graphe donné, on essaie de le voir cō le "plus petit" graphe d'une relat° d'incluso-excluso cyclique.

$\mathrm{Vect}(N_G) \subseteq \mathrm{Vect}(N_{G_I})$

I composit°, $G_I = ..$ ex : $G_{(3,2,1,4)} =$



N_{G_I} ne peut pas ê vu cō dernier graphe d'une incluso-excluso cyclique.

Puis écriture canonique de tte relation

(à compléter)

(B.) Algèbre Vect (Ch_μ).

(Ici, on montre que Vect(Ch_μ)' est bien une algèbre)

Dans "Algèbre", il y a caché que $Ch_{(2)} \cdot Ch_{(2)} \in$ Vect(Ch_μ)

(et pareil pr tt μ_1 et μ_2 pr (2) et (2))

↳ et là il y a qqch à démontrer !! (plus que pr les N_G).

$$Ch_{(2)}(\lambda) = n(n-1)\,\frac{\chi^\lambda((12))}{\dim(\lambda)}$$

D'où question : $\chi^\lambda(\sigma) \cdot \chi^\lambda(\sigma') = ??$

Rappel : $\chi^\lambda(\sigma) = tr(\rho^\lambda(\sigma))$ ... mais la trace passe mal au produit ... Comment faire ?

Lemme : Si $x \in \mathbb{C}[S_n]$ (x = combinaison linéaire de $\sigma \in S_n$)

et si x est central ($\forall \sigma \in S_n,\ x\cdot\sigma = \sigma\cdot x$)

alors $\rho^\lambda(x) = \dfrac{\chi^\lambda(x)}{\dim(\lambda)}\,Id$. d'où sort ce $\dim(\lambda)$?

(plus simplement, $\rho^\lambda(x)$ est un multiple de l'identité. Ensuite, on trouve le facteur multiplicatif en prenant la trace de $\rho^\lambda(x)$)

Preuve : découle du lemme de Schur. On saute...

Cor : Si $x, y \in \mathbb{C}[S_n]$, x et y centraux,

alors $$\frac{\chi^\lambda(x\cdot y)}{\dim \lambda} = \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim \lambda} \cdot \frac{\chi^\lambda(y)}{\dim \lambda}$$

Preuve :
$$\rho^\lambda(x\cdot y) = \rho^\lambda(x)\,\rho^\lambda(y)$$
$$= \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim \lambda} Id \cdot \frac{\chi^\lambda(y)}{\dim \lambda} Id$$
$$= \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim(\lambda)} \cdot \frac{\chi^\lambda(y)}{\dim(\lambda)}\, Id$$

et puisque $x\cdot y$ est aussi central :
$$\rho^\lambda(x\cdot y) = \frac{\chi^\lambda(x\cdot y)}{\dim(\lambda)} \cdot Id.$$
$\boxtimes$

Astuce : on se ramène aux elts centraux :

$$\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda \Big(\underbrace{\overbrace{\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (i\ j)}^{\text{c'est un elt central de } \mathbb{C}[S_n]}}_{= n(n-1) \text{ termes, ts égaux à } \chi^\lambda((12))} \Big)$$

Avec le corollaire :

$$\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)\, \mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda \Big(\sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} (i\ j) \cdot \sum_{\substack{1 \leq k,l \leq n \\ k \neq l}} (k\ l) \Big)$$

$$= \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda \Big(\sum_{\substack{1 \leq i,j,k,l \leq n \\ i,j,k,l \text{ tous distincts}}} (i\ j)(k,l) \; +$$

$$+ 4 \sum_{\substack{1 \leq i,j,l \leq n \\ i,j,l \text{ distincts}}} (i\ l\ j) \quad (\text{cas } i = k)$$

+ les 3 autres cas $i = l$, $j = k$, $j = l$ et les autres parmi i, j, k, l distincts

$$+ 2 \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \mathrm{id} \quad (\text{cas } i = k \text{ et } j = l) \Big)$$

+ l'autre cas $i = l$ + $k = j$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda((12)(34)) + 4\, n(n-1)(n-2) \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda((123)) + 2\, n(n-1) \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda(\mathrm{id}).$$

$$= \mathrm{Ch}_{(2,2)}(\lambda) + 4\, \mathrm{Ch}_{(3)}(\lambda) + 2\, \mathrm{Ch}_{(1,1)}(\lambda).$$

Rq : $\mathrm{Ch}_{(1,1)}(\lambda) = n(n-1) \dfrac{\chi^\lambda(\mathrm{id})}{\dim \lambda} = n(n-1)$

il s'agit ici de l'identité de S_2.

la taille de la partit° est le nb d'indices dans la somme

En particulier, les coefs qu'on obtient en écrivant $\mathrm{Ch}_{\mu_1}(\lambda)\, \mathrm{Ch}_{\mu_2}(\lambda)$ sur les Ch_μ sont positifs et peuvent ê interprétés combinatoirement (m̂ si leur description est compliquée). (pas de formule close en particulier).

PEC
23/11/12

Rappel : $Ch_{(2)} \cdot Ch_{(2)} \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$

Rappel : $\mu \vdash k$ $\quad \pi \in S_k$ de type cyclique μ.

$$Ch_\mu(\lambda) := \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot \dfrac{\boxed{\chi^\lambda(\pi)}}{\dim \lambda} \\ 0 \quad \text{si} \quad |\lambda| < k \end{cases}$$

ici on voit π $\sigma \in S_n$

Ch_μ est une fct° sur <u>tous</u> les diagrammes de Young (de ttes tailles)

<u>Rq</u> : $\dim \lambda$ est la dim° de la rep. indexée par λ

<u>Prop</u> : $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$ est une algèbre.
(c'est une s-algèbre de $\mathcal{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$
ie elle est stable par produit)

(démontrée la semaine dernière)

<u>Objectif</u> : décrire $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$ autrem^t

Ⓐ. Description de Vect(Ch_μ).

1) en tant que fonctions symétriques décalées

<u>Prop</u> : Soit $f \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$

(1) • $(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) \longmapsto f((\lambda_1, \dots, \lambda_\ell))$ est un polynôme f_ℓ en $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$, qui est symétrique en $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_\ell - \ell$.

on fixe le nb de variables

(2) • compatibilité : $f_{\ell+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, 0) = f_\ell(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$

Lien avec les fct°s symétriques (et différence...) :

Une fct° sym. est une suite de polynômes, et vérifie une relation de compatibilité où on met la $(\ell+1)^e$ variable à 0.

Ici, on met la $(\ell+1)^e$ variable à $-(\ell+1)$ dans la relation de compatibilité.

• Réciproquement, si on prend une suite $(f_\ell)_{\ell \geq 1}$ vérifiant les 2 pts précédents (1) et (2), alors elle définit une fonction dans $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$

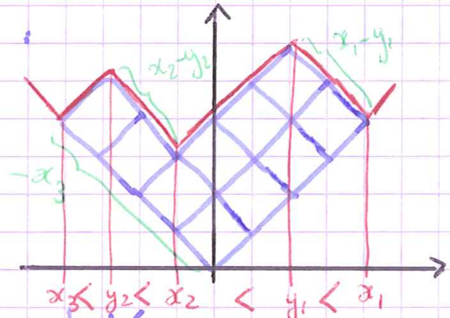
Rq : (1) et (2) définissent les fonctions symétriques décalées (Théorie dvpée dans les années 2000 par Okunkov, Olshansky,... on y trouve les m̂ résultats que sur les fct°s sym. et d'autres résultats en plus → théorie riche !)

2) à partir des coordonnées entrelacées

Descript° d'un diagramme : plusieurs façons possibles :

- → longueur des parts
- → coord. multi-rectangulaires
- → coord. entrelacées (de Kerov) :

on l'obtient à partir de la représentat° russe des diagrammes de Young :



représente $(4, 4, 1, 1)$.

La ligne brisée  code entièrement le diagramme

La suite des x / y décrit les abscisses des minimaux locaux / maxima

(... renormalisées par $\sqrt{2}$)

(x) et (y) sont les coord entrelacées du diagramme, et le représentent complètement

Rq : $\sum_{i=1}^{m+1} x_i - \sum_{i=1}^{m} y_i = 0$ (cf ci-dessus)

Déf : $\boxed{t_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i^k - \sum_{i=1}^{m} y_i^k \quad \text{pour } k \geq 2}$

(pour $k=1$, on tombe sur la rq ci-dessous.
pour $k \geq 2$, c'est plus intéressant ...)

Les t_k sont des fonctions sur l'ens. des diagrammes de Young

Prop : $\boxed{\mathrm{Vect}(Ch_\mu) = \mathbb{C}[t_2, t_3, t_4, \dots]}$

ie l'algèbre est générée par les $(t_k)_{k\geq 2}$

et les $(t_k)_{k\geq 2}$ sont algébriquem^t indépendants

(pas de preuve. on le retrouve en fait par manip. de séries à partir de la prop. précédente)

Idée de comment le retrouver à partir de la description 1) ?

* les (t_k) ressemblent (au "−" près) aux fonctions puissances. En fait $t_k(\lambda)$ est la "fonction puissance sur $\underbrace{(\mathbb{X}-\mathbb{Y})}$"

↳ notation de différence d'alphabets virtuelle, pr le calcul dans les λ-anneaux...

"fonction puissance $(\mathbb{X}+\mathbb{Y})$"

$= \sum x_i^k + \sum y_i^k$

$=$ "fonction puissance $(\mathbb{X})$" + "fonction puissance $(\mathbb{Y})$"

ie $P_k(\mathbb{Z}+\mathbb{Y}) = P_k(\mathbb{Z}) + P_k(\mathbb{Y})$

et pour $\mathbb{Z} = \mathbb{X}-\mathbb{Y}$, on trouve

$P_k(\mathbb{X}) = P_k(\mathbb{X}-\mathbb{Y}) + P_k(\mathbb{Y})$

ce qui donne un sens à $P_k(\mathbb{X}-\mathbb{Y})$, m̂ si $\mathbb{X}-\mathbb{Y}$ n'est pas un "vrai" alphabet...

Cs les fct$^\circ$ puissances engendrent les fct$^\circ$ symétrique, on a:

Cor : $\mathrm{Vect}(Ch_\mu) = \mathrm{Sym}(\mathbb{X}-\mathbb{Y})$

Lemme : $N_G(\lambda) = (-1)^{|V|} \underbrace{F_G(\mathbb{X}-\mathbb{Y})}_{}$

pas défini sur $\mathbb{X}-\mathbb{Y}$ ds ce cours...

mais peut ê défini canoniquement car F_G est quasi-sym.

? vague à revoir

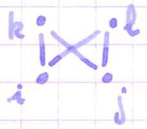
on avait défini F_G sur un seul alphabet.

⚠ F_G n'est pas une fct$^\circ$ symétrique.

Rappel :

$$F_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{\varphi : G \to \mathbb{N}^* \\ \text{croissante}}} \prod x_{\varphi(i)}$$

ex :

F 

$$(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i,j \leq k,l} x_i\, x_j\, x_k\, x_l$$

ⓧ $$Ch_\mu(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{G_{\sigma,\tau}}(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} \overbrace{\varepsilon(\tau)\,(-1)^{|V_\circ|}}^{\text{ce signe est en fait constant}} F_{G_{\sigma,\tau}}(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$$

où π est une perm de type μ

la dépendance en λ est passée dans $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$.

Ceci pose la question suivante :

$$\sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} F_{G_{\sigma,\tau}} \quad \text{est-elle une fct}^\circ \text{ symétrique ?}$$

[Réponse : pas tout à fait. Mais oui dans le quotient où on a mis $\sum x_i = 0$]

Pr mq Ch_μ est une fonction sym de $\mathbb{X} - \mathbb{Y}$, il suffirait de mq que $\sum F_G(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$ l'est. Mais on sait que Ch_μ est sym.

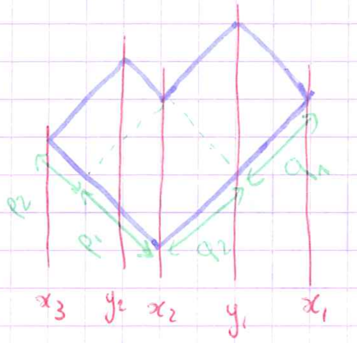
Mais alors $\sum F_G(\mathbb{X})$ l'est-il aussi ? (ce serait suffisant, mais ça n'est pas nécessaire)

on ne sait pas ...

Plus généralement, ceci pose la question de savoir quand une combinaison linéaire des F_G est symétrique.

(avec l'éclairage donné en particulier par les fct$^{\circ s}$ de Schur)

Rq :



$p_1 = x_1 - y_1$

$p_2 = x_2 - y_2$

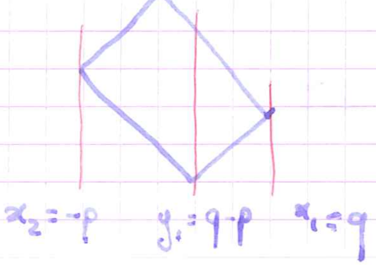
$q_1 = y_1 - x_2$

$q_2 = y_2 - x_3$

Donc on peut relier les $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ aux coord. multi-rectangulaires.

Ex : $$Ch_{(1)}(\lambda) = n\,\frac{\chi^\lambda(id)}{\dim(\lambda)} = n = \frac{1}{2} t_2(\lambda)$$

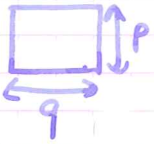
(cas λ rectangle)



car :

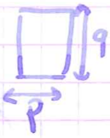
$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 - y_1^2}_{t_2(\lambda)} = 2pq = 2n.$$

Rappel : $Ch_{(2)}(\lambda) = \sum {\lambda_i}^2 - \sum {\lambda'_i}^2$ pour λ rectangle



$= p.q^2 - p^2 q$

(λ' =



son conjugué)

et $t_3(\lambda) = -(q-p)^3 + p^3 - q^3$

$= 3pq^2 - 3p^2q$

donc $ch_{(2)} = \frac{1}{3} t_3$

En fait, écrire que Vect$(Ch_\mu) = \mathbb{C}[t_2, t_3, \dots]$

revient à écrire

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\nu \text{ partition} \\ \ell = \ell(\nu) \text{ sans part} = 1.}} \alpha_\nu^\mu \, t_{\nu_1} \dots t_{\nu_\ell}$$

et les coef. qui apparaissent (les α_ν^μ) sont définis uniquemᵗ et peuvent ê décrit combinatoirement à partir de ⓐ

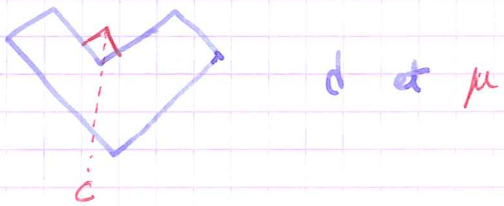
Rq : Les t_k des diagrammes obtenus en ajoutant des cases peuvent ê obtenus par la relatᵒ

$$t_k(\mu) = t_k(\lambda) - 2c^k + (c-1)^k + (c+1)^k$$

car : $\mathbb{X}_\mu - \mathbb{Y}_\mu = X_\lambda - \mathbb{Y}_\lambda - 2a_c + a_{c-1} + a_{c+1}$

(voir $\mathbb{X}_\lambda$ ωō $\sum_{x \in \mathbb{X}_\lambda} a_x$)

et $t_k : a_k \longrightarrow x^k$



P.E.C.
30/11/2012

Rappels :

$$Ch_\mu \in \underbrace{\mathcal{F}(\mathbb{Y}, \mathbb{C})}$$

fonctions sur $\mathbb{Y}$ = tous les diagrammes de Young

C'est Ch_μ qu'on étudie car

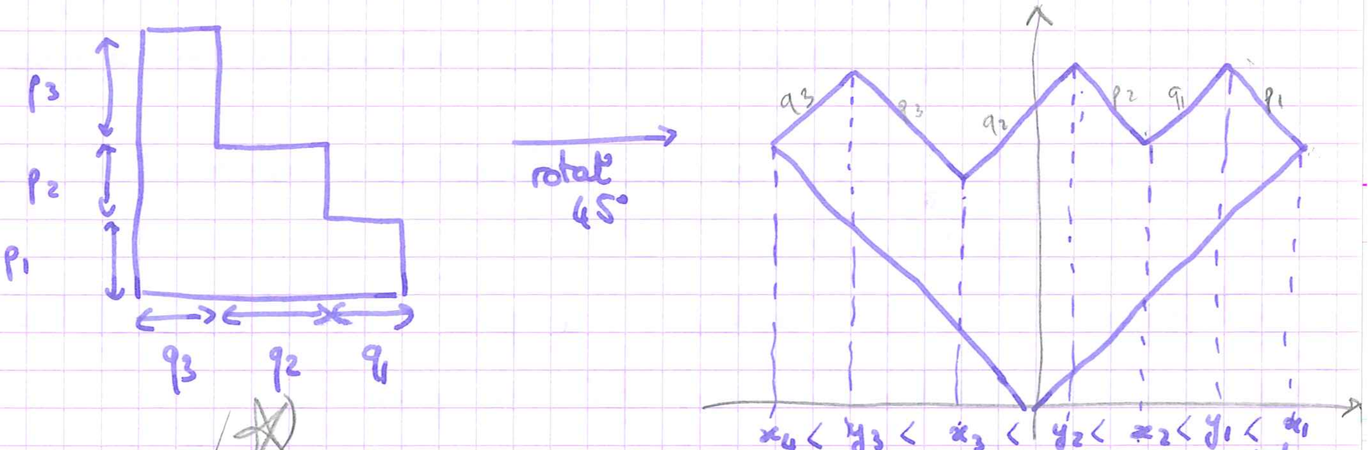
Ch_μ = le caractère normalisé sur une perm. de type μ.

La semaine dernière, on a donné des descriptions de l'algèbre Vect(Ch_μ)

↑ donc stabilité par produit

On repart de la description Vect $(Ch_\mu) = \mathbb{C}[t_2, t_3, \dots]$
(ie tte fct° de Vect(Ch_μ) s'écrit de manière unique
cô un polynôme en les t_k)

Rappel: déf de t_k



(★)

Un param. en plus, mais une relat° pour compenser: $\sum x_i - \sum y_i = 0$

$$t_k(\lambda) := \sum_{i=1}^{m+1} x_i^k - \sum_{i=1}^{m} y_i^k$$

Prop: Une base algébrique de Ch_μ est $t_2, t_3, \dots$
ie Vect $(Ch_\mu) = \mathbb{C}[t_2, t_3, \dots]$

Prop: Ch_μ s'écrit cô $\sum_{\nu \text{ partition}} a_\nu^\mu \, t_{\nu_1} \dots t_{\nu_\ell}$

$\ell = \ell(\nu)$ → longueur de μ ν ?
$m_1(\nu) = 0$ → pas de part égale à 1 pour ν

et les a_ν^μ sont uniques.

question: interprétat° combinatoire des a_ν^μ.

Ⓐ- Développement sur les t_k

Idée: tout écrire en fonction de paramètres p et q'

$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$

$q' = (q_1 + q_2 + \dots + q_m, \; q_2 + \dots + q_m, \; \dots, \; q_{m-1} + q_m, \; q_m)$

dans la représentat° (★) de λ.

ie $q'_i = q_i + \dots + q_m$

* Les Ch_μ en fonction de p et q'

Rappel : $$Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma.\tau = \pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{G_{\sigma,\tau}}$$

où $k = |\mu|$ et $\pi \in S_k$ est une perm. de type μ

$G_{\sigma,\tau}$ est un graphe bicolorié associé à (σ,τ)

$N_{G_{\sigma,\tau}}$ compte les fonctions croissantes sur ce graphe.

Fait :

$N_{G_{\sigma,\tau}}(\lambda)$ a une interprétation combinatoire en fonction de p et q'

on détaille dans la suite

Preuve : on la déduit à partir de l'interprétation combinatoire en fct° de p et q.

Ainsi $Ch_\mu(\lambda(p,q))$ a des coefs en fonction de p et q' qui ont une interprétation combinatoire.

Preuve $$N_G(\lambda(p,q)) = \sum_{\varphi \text{ croissante}} \prod_{\bullet \in V(\bullet)} p_{\varphi(\bullet)} \prod_{\circ \in V(\circ)} q_{\varphi(\circ)}$$

$\downarrow$ i.e. $\varphi(\circ) \geq \max\limits_{\bullet \text{ voisin de } \circ} \varphi(\bullet)$

donc $\varphi(\circ)$ peut prendre ttes les valeurs possibles à partir de i si $i = \max \varphi(\bullet)$. En regroupant ces termes, on voit apparaître $q_i + q_{i+1} + \dots + q_m$

Ainsi, $$N_G(\lambda(p,q)) = \sum_{\substack{\varphi(\circ) = \max \varphi(\bullet) \\ \bullet \text{ voisin de } \circ}} \prod_{\bullet \in V(\bullet)} p_{\varphi(\bullet)} \prod_{\circ \in V(\circ)} q'_{\varphi(\circ)}$$

Les Ch_μ aussi s'écrivent donc bien en fonction de p et q'.

(expression de $\varepsilon(\tau)$ en fct° de $\lambda(p,q)$ ou de $G_{\sigma,\tau}$?)

* Les $t_k(\lambda)$ en fonction de p et q'

Sur le schéma on voit bien la relat° entre les x, y et les p, q' :

$$\overset{(q_k)}{x_i = q'_i - p_1 - \dots - p_{i-1}}$$

$$y_i = q'_i - p_1 - \dots - p_i$$

→ $t_k(\lambda) = \sum x_i^k - \sum y_i^k$ a donc une expression assez complexe en fct° de p et q'

→ $t_{\nu_1}(\lambda) \dots t_{\nu_\ell}(\lambda)$ encore plus!

Mais certains coefficients sont simples :

Lemme : Soient $i_1, \dots, i_r$, ν une partition avec des parts toutes ≥ 2

$$[p_1 q_1'^{i_1-1} \cdots p_r q_r'^{i_r-1}]\, t_{\nu_1} \cdots t_{\nu_\ell} = \begin{cases} 0 \text{ si } \nu \neq \text{tri}(i_1, \dots, i_r) \\ z_\nu \text{ si } \nu = \text{tri}(i_1, \dots, i_r) \end{cases}$$

pas de puissance sur les p.

(où $z_\nu = \prod m_i(\nu)! \prod \nu_i$ est explicite) m_i = multiplicité de i

(admis)

Preuve : idées assez simples.
Il faut regarder proprement de quel terme viennent les variables p et q'
(ex q_r' ne peut venir que de t_r)

Les coef du lemme sont suffisants pour calculer les a_ν^μ.
On ne calcule pas les autres! (= coefs de $t_{\nu_1} \dots t_{\nu_\ell}$ dans Ch_μ)

Corollaire :

$$a_\nu^\mu = \frac{1}{z_\nu} [p_1 q_1'^{\nu_1-1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\nu_\ell-1}]\, Ch_\mu(\lambda(p,q))$$

Preuve

$$Ch_\mu(\lambda(p,q)) = \sum_{\substack{\nu' \text{ partition} \\ m_1(\nu')=0}} a_{\nu'}^\mu t_{\nu'_1} \cdots t_{\nu'_{\ell'}} \qquad \ell' = \ell(\nu')$$

coef de $p_1 q_1'^{\nu_1-1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\nu_\ell-1}$ ↓

$$[p_1 q_1'^{\nu_1-1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\nu_\ell-1}]\, Ch_\mu(\lambda(p,q)) = a_\nu^\mu z_\nu$$

car le seul terme de la somme qui survit est celui indexé par $\nu' = \nu$. ∎

<u>Remarque</u> Le corollaire fournit une interprétation combinatoire de a_p^μ (déduite de celle de Ch_μ en fct° de p et q)
Cette interprétation est intéressante car tous les termes dans $Ch_\mu = \sum a_p^\mu t_{p_1} \dots t_{p_\ell}$ sont dans Vect(Ch_μ). Ce n'était pas le cas avec la précédente interprétat° combinatoire des Ch_μ (faisant intervenir N_G, sachant que Vect(Ch_μ) est strictement inclus ds Vect(N_G))

B. Graduation

Soit $X \in$ Vect(N_G). X est un polynôme en p_i et q_i.
On peut définir $\deg(X) = \deg_{p_i, q_i}(X(d(p,q)))$

Ex : . $\deg(t_k) = k$
(car c'est le degré k en x et y, et le chgt de x,y à p,q est linéaire)

. $\deg(N_G) = |V_G|$ (= nb de sommets de G)
(car ds chq monôme, il y a une variable p ou q par sommet)

. $\deg(Ch_\mu) = ?$

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} \varepsilon(\tau) \underbrace{N_{G_{\sigma,\tau}}}$$

de degré $|V_{G_{\sigma,\tau}}| = \underbrace{|C(\sigma)|}_{\text{nb de cycles de } \sigma} + \underbrace{|C(\tau)|}_{\text{nb de cycles de } \tau}$

<u>Lemme</u> : On fixe $\pi \in S_k$
Si $\sigma\tau = \pi$ alors $|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq k + |C(\pi)|$
et la borne est atteinte.

idée de preuve :

Notons $r(\sigma) = k - |C(\sigma)|$ $(\forall \sigma \in S_k)$

On "sait que" $r(\sigma)$ est le nb de transposition nécessaires pour écrire σ cō produit de transposit^{os} (récurrence...)

$\Rightarrow r(\pi) \leqslant r(\sigma) + r(\tau)$

(en effet, en écrivant σ et τ cō produit de transpositions, on a une écriture de π cō produit de transpositions)

$$\underset{|C(\pi)|-k}{r(\pi)} \ \underset{\geqslant}{\leqslant} \ \underset{|C(\sigma)|+|C(\tau)|-2k}{r(\sigma) + r(\tau)} \iff |C(\sigma)| + |C(\tau)| \leqslant |C(\pi)| + k \ ■$$

Ainsi $\deg(\mathrm{Ch}_\mu) \leqslant |\mu| + \ell(\mu)$.

$\updownarrow$ $|\mu| = k$

$\updownarrow$ nb de cycles de π = nb de parts de μ.

En fait, il y a égalité.

En effet $\varepsilon(\tau) = (-1)^{|C(\tau)|}$. Donc le signe correspond au nb de variables q ds un terme. Donc deux termes ne peuvent pas se compenser. (autrement dit, tous les termes sont positifs en p et $-q$)

Cas $\mu = (k)$. Regardons la composante de plus haut degré.

$$R_{k+1} := \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = (1\ 2 \dots k) \\ |C(\sigma)| + |C(\tau)| = \boxed{k+1}}} \varepsilon(\tau)\, N_{G_{\sigma,\tau}}$$

$|\mu| + \ell(\mu)$ pour $\mu = (k)$.

correspond à des cartes unicellulaires bipartites enracinées avec k arêtes
↳ sur une arête
avec k+1 sommets

} ie ici, la somme est sur des arbres plans enracinés avec k+1 sommets

↓ sur une arête ?

(la bipartit° sur l'arbre est implicite, il suffit de prendre toujours une racine noire (par convent°). Les sommets à hauteur paire (resp impaire) correspondent ainsi aux variables p (resp q)).

↓ ça n'est pas limitant ?

PEC. 7/12/2012

On a vu l'écriture de Ch_μ sur la base algébrique des t_k

On va voir celle ——————————————— R_{k+1}

<u>Rappel</u> : Ch_μ est une fct sur l'ens. des diagrammes de Young

C'est le caractère sur une perm π de type μ (bien renormalisé)

Vect (Ch_μ) est une algèbre

dont une base algébrique est $t_2, t_3, t_4, \dots$

$\varepsilon(\tau) = k - |C(\tau)|$

$$Ch_{(k)} = \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie}\\ \text{unicellulaire}\\ \text{enracinée avec}\\ k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_2(M)|} \underbrace{N_{G(M)}}_{\substack{\text{graphe sous-jacent}\\ \text{à la carte.}}}$$

un sommet rouge par cycle de τ.

(sur une arête)

ds le cas $\mu = (k)$, l'ens de sommets s'interprète combinatoirem' ie des cartes... mais c'est la formule "habituelle"

On s'intéresse à une autre base algébrique de Vect (Ch_μ), les R_k

<u>déf</u> :
$$R_{\underbrace{k+1}} = \sum_{\substack{M \text{ carte bip.}\\ \text{uni. enr.}\\ \text{avec } k \text{ arêtes}\\ \text{et } k+1 \text{ sommets}}} (-1)^k (-1)^{|V_2(M)|} N_{G(M)}$$

⚠ au décalage d'indices !

$\underbrace{\text{carte bip. uni. enr. avec } k \text{ arêtes et } k+1 \text{ sommets}}_{\text{'' arbres plans enracinés}}$

<u>Prop</u> : $\{ R_2, R_3, R_4, \dots \}$ est une base algébrique de Vect (Ch_μ)
(admise)

Q?] Relations entre la base des (t_k) et celle des (R_k) : on peut les écrire explicitement, à la fois pour le passage de R à t et le passage de t à R.
(on ne répond pas en détails)

Q?] quel est le dvpt de Ch_μ sur la base des R ?

On pourrait écrire Ch_μ sur la base de t, puis passer de t à R, mais les calculs sont lourds (inclus°-exclus°, ...) [c'est possible]

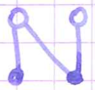
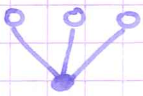
On décrit plutôt ici une méthode combinatoire pour calculer ce dvpt.

Calcul pour $\mu=(k)$ et des petites valeurs de k :

$Ch_{(1)} = N$  $= N$  $= R_2$

(convention de couleurs : ● = ○ et ● = ●)

$Ch_{(2)} = -N$  $+ N$  $= R_3$

$Ch_{(3)} = N$  $- 3\ N$  $+ N$  $+ N$ 

nb d'enracinem^{ts} possibles

Rq : cette carte est bien unicellulaire.

$= R_4 + N$ 

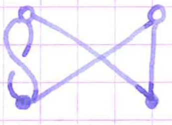
$= R_2$

car N ne dépend que du graphe simple sous-jacent

$= R_4 + R_2$

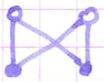
$Ch_{(4)}$ = (m̂ principe que $Ch_{(4)}$)

$Ch_{(5)}$ = (120 termes ! dont les suivants ...)

$= \ldots - 5\ N$ 

(enracinem^{ts} possibles)

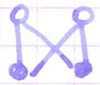
$=$

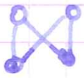
N  (on prend le graphe sous-jacent)

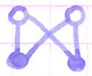
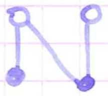
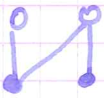
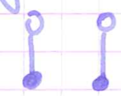
qui n'est pas un arbre...

Rappel : $N_G \cdot N_{G'} = N_{G \sqcup G'}$ ($\sqcup$ = union disjointe)

donc $R_{\nu_1} \dots R_{\nu_\ell} = \sum_{\substack{G \\ \text{certaines} \\ \text{forêts}}} \pm N_G$

Donc N  n'est pas un produit de $R_{\dots}$!

Il faut utiliser les relations entre les N pour transformer N  et faire apparaître des arbres :

N  = N  + N  − N 

(par inclusion-exclusion cyclique)

Plus généralem^t, dès qu'il y a un cycle, on le "casse" en des arbres de cette façon.

Il faut ensuite regrouper les N_{arbres} qui apparaissent pour faire apparaître les $R_{\dots}$

Cela demande

1) de faire les bons choix sur les cycles à "casser"

2) de bien regrouper les N_{arbres} pour avoir des $R_{..}$

C'est possible [cf thèse de Valentin] mais difficile...

On va ici utiliser une autre approche qui utilise que les relat^os d'inclus° exclus° cyclique sont <u>les seules</u> relat^os entre les N_G. [Ainsi, on démontre une formule conjecturée par la 1^e approche]

On sait que $\exists ! \, b_\nu^\mu$ tq $Ch_\mu = \sum_{\substack{\nu \text{ partit°} \\ \text{sans parts} \\ = \text{à } 1}} b_\nu^\mu R_{\nu_1} \dots R_{\nu_\ell}$

(car les R_{k+1} sont une base algébrique de $Vect(Ch_\mu)$)

Idée : Construire une fonction $I_\nu : \mathrm{Vect}(N_G) \longrightarrow \mathbb{C}$

tq $I_\nu\left(R_{\nu'_1} \cdots R_{\nu'_l}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \nu' \\ \neq 0 & \text{si } \nu = \nu' \end{cases}$

Ainsi, en appliquant I_ν à Ch_μ, on aura accès à b^μ_ν.

Rappel : $\mathrm{Vect}(N_G) = \mathrm{Vect}(G) /_{\text{inclus° - exclus° cyclique}}$

donc pour définir I_ν, il suffit de définir une fonction sur Vect (G) qui soit compatible avec (ie qui s'annule sur) les relat°s d'inclus° exclus° cyclique

déf Soit $V_\circ$ un ensemble, et $h : V_\circ \longrightarrow \mathbb{N}^*$.

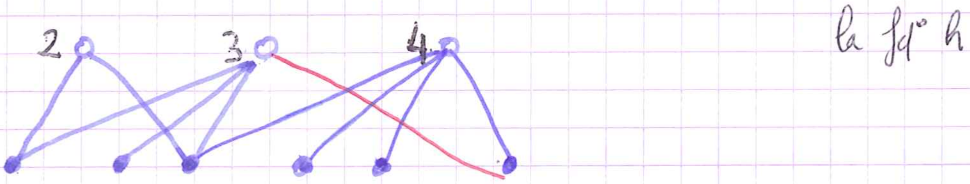
Un graphe G biparti dont l'ens. de sommets blancs est $V_\circ$ est h-expanseur si :

- $\displaystyle\sum_{\circ \in V_\circ} h(\circ) = |V(G)|$
- $\displaystyle\forall\, V \subseteq V_\circ \quad |\underset{\substack{\uparrow \\ \text{voisinage fermé de } V}}{\overline{\mathcal{V}}(V)}| \geqslant \sum_{\circ \in V} h(\circ)$

en particulier, pr un graphe connexe, on veut une inégalité stricte $\forall\, V \neq V_\circ$ et $\emptyset$ } avec inégalité stricte quand $\mathcal{V}(V)$ n'est pas une union de composantes connexes du graphe

Rq : Cette 2e condit° rappelle la déf. de graphe expanseurs, mais le lien est mystérieux ...

Ex :



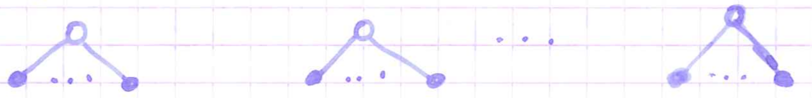
Ici, le voisinage de $i\circ$ a ~~au moins~~ $> i$ sommets • et ∘

Mais il faut aussi que le voisinage de $\{i\circ, j\circ\}$ ait ~~au moins~~ $> i+j$ sommets • et ∘. Ceci demande d'ajouter \ à l'exemple, car les voisinages choisis se recoupaient trop

Les graphes expanseurs sont connus pr ê "très connexes".
En particulier, arbres et forêts ne le sont jamais.

(*) **Lemme** : Une forêt F est h-expanseur ssi F est une union disjointe d'étoiles de centre blanc (ie
(admis)

F =



)

et $h(o)$ = taille de sa comp. connexe.

Notons $\mathrm{sgex}^{h}_{G} = (-1)^{c.c.(G)} \cdot \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ est } h\text{-expanseur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(c.c.(G) = # comp connexes de G).

Lemme : G avec un cycle C.

Notons E un demi-ensemble des arêtes du cycle.

(Rappel : alors l'inclus° - exclus° cyclique s'écrit $\sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} N_{G \setminus E'} = 0$)

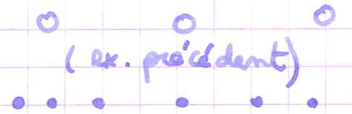
Alors $\sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} \mathrm{sgex}^{h}_{G \setminus E'} = 0$

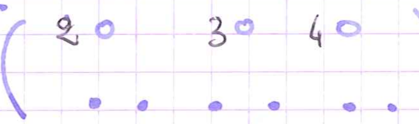
Preuve : elle est plus compliquée qu'il n'y paraît !
Voir la preuve de V. Féray et P. Śniady, qui utilise des outils complexes (cônes, triangulations, ...)
On n'a pas de preuve simple de cet énoncé.

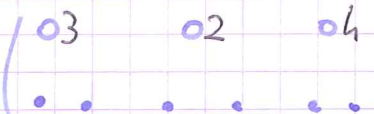
Fixons une partition ν.

déf $I_{\nu}(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell(\nu) \neq |V_0(G)| \\ \displaystyle\sum_{h : V_0 \to \mathbb{N}^*} \mathrm{sgex}^{h}_{G} & \end{cases}$

tq multiensemble des ~~$h(V_0)$~~ $h(v), v \in V_0$
= multiensemble des (ν_i)

Ex $I_{(4,3,2)}$ $\Big($  $\Big)$

$= (-1)^{c.c.(G)} \Bigg(\Big[$  est expanseur $\Big]$

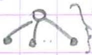
$+ \Big[$  est expanseur $\Big]$

$+ \cdots \Bigg)$

Ainsi, on a défini I_ν sur $Vect(N_G)$

Avec le lemme (*) $I_\nu(R_{\nu'_1}\cdots R_{\nu'_\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \nu' \\ \underbrace{\neq 0}_{} & \text{sinon} \end{cases}$

et ici c'est un facteur explicite

Chq R_k est une $\sum_{T \text{ arbres}} \pm N_T$, T =  } est dans l'ens. de sommet° } ν'_1 sommets

Donc $R_{\nu'_1}\cdots R_{\nu'_\ell}$ est une $\sum_{F \text{ forêts}} \pm N_F$ (car $N_G \cdot N_{G'} = N_{G \sqcup G'}$)

Par (*), le seul terme non nul dans $I_\nu(R_{\nu'_1}\cdots R_{\nu'_\ell})$ est celui correspondant à

Conclusion : $b_\nu^\mu = \underset{\uparrow}{*}\, I_\nu(Ch_\mu)$

facteur explicite

$$= * \sum_{\sigma \cdot \tau = \pi} \varepsilon(\tau)\, I_\nu(G_{\sigma,\tau})$$

Dans le cas $\mu = (k)$, les signes disparaissent

Donc les coefs $b_\nu^{(k)}$ sont > 0, avec une interprétat° combinatoire.

Petit bilan :

Ch_μ est le caractère normalisé

On a vu plusieurs interprétat°s combinatoires de Ch_μ :

avec
- les N_G → graphes dessinés sur les surfaces orientées
- les t_k → } aussi, mais avec des contraintes supplémentaires sur ces graphes.
- les R_k → }

On peut définir une déformation $Ch_\mu^{(\alpha)}$ tq $Ch_\mu^{(1)} = Ch_\mu$.

[ceci fait écho à la déformat° des fct° sym. en polynômes de Jack]

On peut montrer que Vect($Ch_\mu^{(\alpha)}$) est aussi une algèbre, qui a exactem^t la m̂ structure de Vect(Ch_μ) :

$$\text{Vect}(Ch_\mu^{(\alpha)}) \cong \text{Vect}(Ch_\mu)$$

Mais cette $\cong$ est mystérieuse (conjectures de Michel Lassalle)

Cependant pour $\alpha = 2$, tous les thm de $\alpha = 1$ se généralisent en remplaçant "surfaces orientées" par "surfaces quelconques". Pour $\alpha = 2$, il y a aussi une interprétation en termes de représentations de la paire de Gelfand (S_{2n}, H_n) (les caractères irred. correspondent à $\alpha = 2$).

PEC
14/12/2012

Objectif : essayer de décrire la forme limite de grands diagrammes pris au hasard selon la mesure de Plancherel (pas uniforme)

quest posée dès les années 70

approche présentée : celle de Kerov (1993) développée par Ivanov et Olanski (article de 2003).

Elle utilise la vision des caractères cō fct^s sur les diagrammes de Young.

Grands diagrammes sous la mesure de Plancherel

Ⓐ Définition du problème

Déf : Soit $n \geq 1$. La mesure de Plancherel est une mesure de proba sur $\mathbb{Y}_n$ (= ens des diagrammes de taille n = ens des partitions de n) définie par, si $\lambda \vdash n$

$$\mathbb{P}_n(\lambda) = \frac{(\dim V_\lambda)^2}{n!}$$

$\dim(V_\lambda)$ = dim° de la représentation irred. associée à λ

= nb de tableaux standards de forme λ.

- **Rappel** (justifiant la déf.) : $\sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda)^2 = n!$

  Ce rappel est vrai pour tout groupe (cf décomposit° de la représentat° régulière → cf première séance)

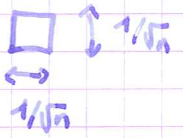
- **Description combinatoire de la mesure de Plancherel** :
  - prendre une perm. de taille n uniformément
  - appliquer RSK (Robinson-Schensted-Knuth) on obtient une paire (T_1, T_2) de tableaux (de Young), qui ont la m̂ forme, notée λ.
  - garder la forme λ.

On obtient une partition aléatoire dont la distribution est la mesure de Plancherel.

- **Problème** : Prendre pour chaque n un diagramme aléatoire, noté $\lambda^{(n)}$ (sous la mesure de Plancherel, tjs). Que peut-on dire de $\lambda^{(n)}$ quand $n \to +\infty$?

- **Renormalisation** : on commence par renormaliser, pour que tous les $\lambda^{(n)}$ vivent "dans le m̂ monde".

déf : $T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})$ est le diagramme $\lambda^{(n)}$ dessiné avec des cases de côté $1/\sqrt{n}$:



Ainsi, les $T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})$ st tjs d'aire = à 1.

Obs : Toutes nos fonctions sur les diagrammes s'expriment cō des polynômes en p et q. Donc on peut les appliquer à $T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})$, qui a aussi des coord. multirectangulaires

Plus précisément :

Si $F \in \mathrm{Vect}(N_G)$, $F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)}))$ est bien défini :

- $d^{(n)}$ a pour coord. multirect. $p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}, q_1^{(n)}, \dots, q_m^{(n)}$
- $T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)})$ ———————— $\frac{p_1^{(n)}}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{p_m^{(n)}}{\sqrt{n}}, \frac{q_1^{(n)}}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{q_m^{(n)}}{\sqrt{n}}$.
- et $F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)})) = F(d(p,q)) \Big|_{q_i \leftarrow q_i^{(n)}/\sqrt{n}}^{p_i \leftarrow p_i^{(n)}/\sqrt{n}}$

les génériques

ceux de $d^{(n)}$

Rq : Si F est homogène de degré d, on obtient

$$F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)})) = \frac{1}{n^{d/2}} F(d^{(n)})$$

(Ceci peut s'appliquer aux N_G, mais surtout aux R_k)

- <u>Que veut dire "convergence de diagramme"?</u>

→ Il existe une not° géométrique (on y reviendra après)

→ Cō on a des fonctions F (plutôt régulières ...) on peut regarder la convergence des $F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)}))$

Si $F \in \mathrm{Vect}(N_G)$, $F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)}))$ converge-t-elle ?

Rq : C'est une approche courante en proba, qui ressemble à la convergence faible.

On va voir "assez facilement" (grâce à la compréhens° de l'algèbre $\mathrm{Vect}(Ch_\mu) \subsetneq \mathrm{Vect}(N_G)$) que si $F \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$, alors $F(T_{1/\sqrt{n}}(d^{(n)}))$ converge en loi (ou en proba, et presque sûrement). [Les limites sont ê déterministes]

On verra aussi que la convergence au sens "géométrique" peut se déduire de la prop ci-dessus.

Ⓑ. Graduation

Déf . Si $X \in \mathrm{Vect}(N_G)$, on définit

$$\deg(X) := \deg_{p,q}\left(d(p,q)\right)$$

Prop . On a aussi des R_k tq $(R_k)_{k\geq 2}$ est une base algébrique de $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$, et tq $\deg(R_k) = k$.

Prop . $\deg(Ch_\mu) = |\mu| + \ell(\mu)$ (taille + nb de parts).

$\Rightarrow \deg(Ch_{(k)}) = k+1$

. $\deg(Ch_{(k)} - R_{k+1}) \leqslant k$

$\uparrow$ terme dominant (ie de degré max, qui est $k+1$) de $Ch_{(k)}$

en fait, pour des raisons de parité, $\deg(Ch_{(k)} - R_{k+1}) = k-1$

. de m̂, $\deg\left(Ch_\mu - \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} R_{\mu_i+1}\right) = |\mu| + \ell(\mu) - 2$

(?)

Autrement dit, le terme dominant de $Ch_{(2,2)}$ est $R_3 \cdot R_3$

idem pour $Ch_{(k,k)}$ et $R_{k+1} R_{k+1}$

Cor Si $X \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$, $X = \sum_\mu a_\mu Ch_\mu$, alors

$$\deg(X) = \max_{\mu : a_\mu \neq 0} |\mu| + \ell(\mu)$$

Preuve : . $\deg(X) \leqslant \max_{\mu : a_\mu \neq 0} |\mu| + \ell(\mu)$ par le résultat sur les degrés des Ch_μ.

. On regarde le terme de degré $d = \max_{\mu : a_\mu \neq 0} |\mu| + \ell(\mu)$ dans X, noté $\mathrm{hom}_d(X)$:

$$\mathrm{hom}_d(X) = \sum_{\mu : \boxed{|\mu| + \ell(\mu) = d}} a_\mu \, \mathrm{hom}_d(Ch_\mu)$$

hom_d → composante homogène de degré d

$|\mu| + \ell(\mu) = d$ → $\mathrm{hom}_d(Ch_\mu)$ est nul pour les autres (sauf si $a_\mu = 0$).

$$= \sum_{\substack{\mu \\ |\mu| + \ell(\mu) = d}} a_\mu \underbrace{\prod_{i=1}^{\ell(\mu)} R_{\mu_i+1}}_{= \text{son propre } \mathrm{hom}_d(\cdot)} \boxed{\neq 0}$$

car au moins un $a_\mu \neq 0$ (et R_k base algébrique)

■

C- Convergence des $F(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)}))$

Il est facile de calculer l'espérance de Ch_μ sous la mesure de Plancherel

$(\mu \vdash k)$

Lemme : $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_\mu(\lambda^{(n)})\right) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1) & \text{si } \mu=(1^k) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Rappel : $$Ch_\mu(\lambda) := \begin{cases} n(n-1)\ldots\ldots(n-k+1)\, \dfrac{\chi^\lambda(\mu\, 1^{n-k})}{\dim V_\lambda} & \text{si } k \leq n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}$$

(on a tj. $\lambda \vdash n$ et $\mu \vdash k$).

Preuve : $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_\mu(\lambda^{(n)})\right)$ (dans le cas $k \leq n$)

$$= n(n-1)\ldots(n-k+1)\; \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(\frac{\chi^\lambda(\mu\, 1^{n-k})}{\dim V_\lambda}\right)$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1) \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim V_\lambda)^2}{n!} \frac{\chi^\lambda(\mu\, 1^{n-k})}{\dim V_\lambda}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n!} \underbrace{\sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda) . \chi^\lambda(\mu\, 1^{n-k})}$$

$$= tr_{\oplus V_\lambda^{\dim \lambda}}\, \rho(\mu\, 1^{n-k}) \quad \text{(cf } 1^e \text{ séance)}$$

rep. régulière

$$= \chi^{\boxed{reg}}(\mu\, 1^{n-k})$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1) & \text{si } \mu 1^{n-k} = 1^n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

∎

Lemme : Si $X \in Vect(Ch_\mu)$, alors

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(X(\lambda^{(n)})\right) = O\left(n^{\deg(X)/2}\right)$$

Preuve :
- C'est vrai pour les Ch_μ par le lemme précédent ($\deg$ de (1^k) $= \underset{\text{taille}}{k} + \underset{\text{nb de parts}}{k} = 2k$ et $\mathbb{E}\ldots = O(n^k)$ si $k \leq n$)
- Si $X = \sum_\mu a_\mu Ch_\mu$ — $\deg(X) \geq 2k$ dès que $\mu=(1^k)$ apparaît ds cette somme avec $a_\mu \neq 0$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(X(\lambda^{(n)})\right) = \sum_k a_{(1^k)}\, n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

$$= O\left(n^{\deg(X)/2}\right)$$

car $\max_{k \,:\, a_{(1^k)} \neq 0} k \leq \frac{\deg(X)}{2}$. (cf rq précédente) ■

Regardons les R_k :

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(R_{k+1}(\lambda^{(n)})\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_{(k)}(\lambda^{(n)})\right) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left((R_{k+1} - Ch_{(k)})(\lambda^{(n)})\right)$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_{(k)}(\lambda^{(n)})\right) + O\left(n^{(k-1)/2}\right)$$

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(R_{k+1}(\lambda^{(n)})^2\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_{(k,k)}(\lambda^{(n)})\right) + O\left(n^{\textcircled{k}}\right)$

taille $k = \frac{k+2-2}{2}$ ×2 nb de parts le carré

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(R_{k+1}(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)}))\right)$

$$= \frac{1}{n^{(k+1)/2}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(Ch_{(k)}(\lambda^{(n)})\right) + O\left(n^{(k-1)/2}\right)\right]$$

$= O(n^{-1})$ si $k \geq 2$ (car alors le 1er terme $= 0$ si $k \geq 2$) (seul les $\mathbb{E}(Ch_{(1^k)})$ sont $\neq 0$).

De m̂, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left(R_{k+1}^2(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)}))\right) = O(n^{-1})$ si $k \geq 2$

Donc la variance de $R_{k+1}^2\left(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})\right)$ est un $O(n^{-1})$ si $k \geq 2$.

Par un petit lemme de proba, on en déduit que :

Prop : si $k \geq 2$, $R_{k+1}\left(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})\right) \xrightarrow[P]{} 0$ (CV en proba).

Rq : pour le cas $k = 2$, on a tjs $R_2\left(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})\right) = 1$. car $R_2 = Ch_{(1)} = n$

Cor : Si $F \in Vect(Ch_\mu)$, alors $F\left(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})\right)$ converge en proba

(car les R_k sont une base algébrique des Ch_μ)

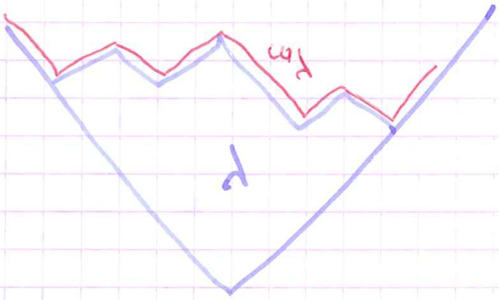
Rq : En calculant le 4e moment (et pas juste le 1er et 2e), on peut montrer que la convergence est presque sûre.

Rq : En étudiant tous les moments (plutôt les cumulants en fait), on peut montrer qu'il y a des fluctuat° gaussiennes.

C'est technique, mais c'est un résultat nouveau obtenu par cette approche.

D.) Convergence géométrique

On peut dessiner les diagrammes "à la Russe". La frontière supérieure est ainsi le graphe d'une fct $\omega_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



On peut définir de m̄ $\omega_{T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On définit :

$$\Omega(x) := \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq 2 \text{ (c'est juste la valeur absolue)} \\ \frac{2}{\pi}\left(x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2}\right) & \text{si } |x| \leq 2 \end{cases}$$

Ω est un "diagramme continu"

Ω donne les valeurs limites des diagrammes renormalisés :

. Thm : En proba $\left\| \omega_{T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})} - \Omega \right\|_\infty \longrightarrow 0$

. On peut définir $F(\Omega)$ pour $F \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$.

Un calcul donne $R_2(\Omega) = 1$

$R_k(\Omega) = 0$ pour $k \geq 3$

Rq: Pour définir F sur $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-lipschitz tq $\omega(x) = |x|$ pour $|x|$ assez grand, $\forall F \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$, on le fait sur les t_k :

on pose $\sigma(x) = \frac{\omega(x) - |x|}{2}$

et $t_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(k-1)\, x^{k-2} \sigma(x)\, dx$.

(si $\omega = \omega_\lambda$, $t_k(\omega_\lambda) = t_k(\lambda)$ défini avant ds le cours par $\sum x_i^k - y_i^k$)

Rq : ces t_k coïncident bien avec les "habituels" si ω vient d'un diagramme λ renormalisé.

Lemme $\exists\, c > 0$ tq si $\lambda^{(n)}$ est distribuée sous $\mathbb{P}_n$

$$P\big(\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{re} \text{ part de } \lambda^{(n)}}}{\lambda_1^{(n)}} \text{ et } \ell(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nb de parts de } \lambda^{(n)}}}{\lambda^{(n)}}) \leq c\sqrt{n}\big) \longrightarrow 1$$

ie longueur d'une ss-suite ↗ d'une perm

--- ↘ ---

"Tous les diagrammes restent dans un compact"

La not° de convergence" pour toute fonction" paraît plus faible, mais en fait non : elle permet de démontrer la convergence "plus forte", géométrique et uniforme.
Et les résultats pour la 1^{re} ("facile") not° de convergence sont assez simples à obtenir à partir des résultats sur Vect (ch_μ).