Approche duale des représentations du groupe symétrique

Titre de la note

par Valentin

Plan :
I) Représentation des groupes finis - Cas du groupe symétrique
II) Approche duale : fct° "polynomiales" sur les diagrammes de Young
III) Combinatoire des caractères normalisés et cartes
IV) Application : Gds diagrammes aléatoires

I) Représentation des groupes finis - Cas du groupe symétrique

1) Définitions et exemples

Déf [Représentation] Soit G un groupe fini

Une représentation de G est un couple (V, ρ) où
- V $\mathbb{C}$-ep vectoriel de dimension finie
- $\rho : G \to GL(V)$ morphisme de groupes

Ex : G qcq

- $V = \mathbb{C}$ $\quad \rho(G) = Id$ $\quad$ Représentation triviale

- $V = \mathbb{C}[G]$ (base $(e_g)_{g \in G}$)

$$\rho(g) \cdot e_{g'} = e_{g \cdot g'}$$ Représentation régulière (à gauche)

- $G = \mathfrak{S}_n$ $\quad V = \mathbb{C}^n$

$$\rho(\sigma) \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$$

$\boxed{\text{représentation géométrique}}$

voire

$G = \mathfrak{S}_n \qquad V = \mathbb{C}_d[x_1, \dots, x_n]$

$$\rho(\sigma) \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$$

"morphismes d'alg"

Si (V, ρ) et (V', ρ') sont 2 représentations du même groupe G,

$(V \oplus V', \rho \oplus \rho')$ est une représentation

où $(\rho \oplus \rho')(g) \cdot (v, v') = (\rho(g) \cdot v, \rho'(g) \cdot v')$

mais aussi $(\mathcal{L}(V, V'), \mathrm{Hom}(\rho, \rho'))$

où $\mathrm{Hom}(\rho, \rho')(g) \cdot f = \rho'(g^{-1}) \circ f \circ \rho(g)$.

Question : G étant fixé, décrire les représentations de G à isomorphisme fixé.

Def [Morphisme] (V, ρ) et (V, ρ') 2 représentations de G

$\varphi : V \to V'$ est un G-morphisme si

$$\forall g \in G \ \forall v \in V \quad \varphi(\rho(g) \cdot v) = \rho'(g) \circ \varphi(v)$$

qu'on peut noter $\quad \varphi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \varphi$

Déf [Rep. irréductible] Une représentation (V,ρ) est irréductible si elle ne peut pas s'écrire $(V_1,\rho_1)\oplus(V_2,\rho_2)$

avec $V_1\neq\{0\}$ et $V_2\neq\{0\}$

Remarque Si (V,ρ) est réductible, elle a un ss-esp V_1 différent de 0 et V stable par tous les $\rho(g)$.

Théorème (Maschke) : C'est une équivalence !
(faux en dimension infinie)

(Preuve : On prend p un projecteur sur V_1

et on s'intéresse à $r=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ p\circ\rho(g)^{-1}$

On a alors $V=V_1\oplus\mathrm{Ker}(r)$)

Si $\varphi:(V,\rho)\to(V',\rho')$ morphisme,

alors $\mathrm{Im}(\varphi)$ ss-espace stable par les $\rho'(g)$

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ ——— $\rho(g)$

De plus si $(V,\rho)=(V',\rho')$,

vu que φ et $\rho(g)$ commutent,

tous les espaces propres de φ sont stables par les $\rho(g)$.

Lemme de Schur Si V et V' sont irréductibles tq $\exists$ morphisme $\varphi : V \to V'$

Alors :

1) V et V' isomorphes <u>ou</u> $\varphi = 0$

2) Si $V = V'$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tq $\varphi = c.\mathrm{Id}$.

Donc $\dim\left(\mathrm{Hom}_G(V,V')\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \simeq V' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\| $$

$\dim\left(\underbrace{\mathrm{Hom}(V,V')^G}_{\text{éléments de } \mathrm{Hom}(V,V') \text{ fixes par ts les éléments de } G}\right)$

2) Caractères

Def [Caractère] Le caractère χ^ρ de (V,ρ) est

$$\chi^\rho : \begin{array}{l} G \to \mathbb{C} \\ g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

Ex
- $\chi^{\text{triviale}} \equiv 1$
- $\chi^{\text{géométrique}}(\sigma) = \#$ points fixes de ρ
- $\chi^{\text{régulière}}(g) = \#\{g' \mid gg' = g'\}$
$= \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Proposition $\chi^{\rho \oplus \rho'} = \chi^\rho + \chi^{\rho'}$

Rq $\forall (g,h) \in G^2 \quad \chi^\rho(h^{-1}gh) = \chi^\rho(g)$

Def [Fonction centrale]

Une fonction centrale est une fonction constante sur les classes de conjugaison

Ex : les χ^ρ

Théorème Les $(\chi^\rho)_{\rho \text{ caract. irréd.}}$ forment une base orthonormée des fonctions centrales pour le produit scalaire $\langle f, f' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) f'(g^{-1})$

Conséquences • nbe de caractères irréductibles $=$ nbe de classes de conjugaison $< +\infty$

• La décomposition $V = V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{m_r}$ (avec $i \neq j \Rightarrow V_i \not\cong V_j$) est-elle unique?

OUI et NON

$\Downarrow$

$$\chi^V = m_1 \chi^{V_1} + \dots + m_r \chi^{V_r}$$

$m_i = \langle \chi^V, \chi^{V_i} \rangle \Rightarrow$ les m_i sont uniques!

Les V_i ne sont pas forcément uniques.

Rq $\langle \chi^V, \chi^V \rangle = \sum_i m_i^2$

Ex : $\langle \chi^{\text{géom}}, \chi^{\text{géom}} \rangle = \underbrace{\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\#\text{ pts fixes}(\sigma))^2}_{=2}$

(**Preuve** : $\sum_K K^2 \, \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma \text{ a } k \text{ pts fixes}\} = \underbrace{\sum_K K \, \#\{\sigma \mid \sigma \text{ } k \text{ pts fixes}\}}_{1} + \underbrace{2 \sum \binom{k}{2} \#\{\sigma \mid \sigma \text{ a } k \text{ pts fixes}\}}_{2}$

① = # permutations avec 1 pt fixe marqué $= n \times (n-1)!$

② = ——— ——— 2 pts fixes marqués $= \binom{n}{2} \times (n-2)!$

① + 2 × ② = $2n!$)

d'où $\sum_i m_i^2 = 2$

$V^{\text{géom}}$ est somme de 2 représentations irréductibles non isomorphes !

$$\mathbb{C}^n \supseteq \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n) \simeq V^{\text{triviale de } \mathfrak{S}_n}$$

d'où $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n) \oplus \{x_1 + \dots + x_n = 0\}$

- Représentation régulière :

$$\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$m_i = \langle \chi^{V_i}, \chi^{\text{reg}} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{\text{reg}}(g) \chi^{V_i}(g^{-1})$$

$$= \chi^{V_i}(e) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_{V_i}) = \dim(V_i)$$

$$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_i V_i^{\dim(V_i)}$$

Corollaire $\chi^{\rho} = \chi^{\rho'} \Rightarrow \rho \simeq \rho'$

$G = \mathfrak{S}_n$ Questions : - représentations irréd ?
- caractères ?

3. Symétriseurs de Young

Prop (rappel) : $\mathbb{C}[G] = \bigoplus_{\rho \text{ irréd}} V_\rho^{\dim(V_\rho)}$

Fixe une irrep
$\mathbb{C}[G] = V_\rho \oplus \dots$ "non unique"

Considérons φ_ρ proj sur V_ρ

- φ_ρ est un G-morphisme de $\mathbb{C}[G]$

$$\varphi_\rho \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$$

Description de $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$:

- gros sous-espace pour $g \in G$ $\quad r_g : e_g \mapsto e_{g'g}$

$$r_g \in \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G])) \geq |G|$$

- $\dim \mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G]) = \langle \chi^{reg}, \chi^{reg} \rangle = |G|$

Prop $\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}[G], \mathbb{C}[G]) = \mathrm{Vect}(\{r_g, g \in G\})$
$= \{r_x, x \in \mathbb{C}[G]\}$

Conséquence : $\varphi_\rho = r_{n_\rho}$ avec $n_\rho \in \mathbb{C}[G]$
or $\varphi_\rho^2 = \varphi_\rho$

donc $n_\rho^2 = n_\rho$.

Conclusion Les irrep de G peuvent être construits sous la forme $\mathbb{C}[G]\, r_p$ où $r_p \in \mathbb{C}[G]$
$r_p^2 = r_p$

⚠ r_p non unique !!

$G = \mathfrak{S}_n$

Rappel # irrep = # classe de conj = # partitions de n

Donc : les irrep sont indexées par les partitions λ de n sont U_λ (canoniquement)

Plan : On fixe $\lambda \vdash n$
→ on définit $r_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$
→ on va montrer que
- $r_\lambda^2 = r_\lambda$
- $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\, r_\lambda$ est irréductible
- Si $\lambda \neq \mu$, $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\, r_\lambda \not\cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\, r_\mu$

- Choisir un remplissage de λ

$T_{ex} = $
2	4	
3	1	5

$\lambda_{ex} = (3,2)$

- $a_\lambda = \sum_{\sigma \in R\mathfrak{S}_T} \sigma$ (permutat° qui préserve les lignes) $\qquad b_\lambda = \sum_{\sigma \in C\mathfrak{S}_T} \varepsilon(\sigma)\,\sigma$ (" colonnes)

$b_{\lambda_{ex}} = \mathrm{Id} - (2\ 3) - (1\,4) + (23)(14)$

$a_{\lambda_{ex}} = $ somme de 12 permutations

Rq Si $\sigma \in R\mathfrak{S}_T$ $\quad a_\lambda . \sigma = \sigma . a_\lambda = a_\lambda$

$\tau \in C\mathfrak{S}_T$ $\quad b_\lambda . \tau = \tau . b_\lambda = \varepsilon(\tau)\, b_\lambda$

a_λ, b_λ dépendent de T

Lemme $(a_\lambda b_\lambda)^2 = \alpha_\lambda a_\lambda b_\lambda$ pour un certain $\alpha_\lambda \in \mathbb{C}^*$

Donc $p_\lambda = \dfrac{a_\lambda b_\lambda}{\alpha_\lambda}$ est un projecteur.

> **À part :**
> $p_{\text{(une ligne)}}$ = triviale
> $p_{\text{(une colonne)}}$ = signature
> $p_{\text{(équerre)}}$ = géométrique triviale.

Preuve Si $x = a_\lambda b_\lambda$

$$(*) \begin{cases} \sigma x = x \\ x\tau = \varepsilon(\tau)\, x \end{cases} \quad \text{pour } \sigma \in R\mathfrak{S}_T,\ \tau \in C\mathfrak{S}_T$$

Vrai aussi pour $x = (a_\lambda b_\lambda)^2$

Prouvons que $(*)$ caractérise x à un scalaire près.

Soit x qui vérifie $(*)$ $\quad x = \sum'_{\pi \in \mathfrak{S}_n} c_\pi . \pi$

$\sigma \in R\mathfrak{S}_T$ $\quad [\sigma\tau]\, \sigma x \tau = [\mathrm{Id}]\, x = c_{\mathrm{Id}}$

$\tau \in C\mathfrak{S}_T$ $\quad [\sigma\tau]\, \varepsilon(\tau) x = \varepsilon(\tau)\, c_{\sigma.\tau}$

Or π s'écrit $\sigma.\tau$ avec $\sigma \in R\mathfrak{S}_T$, $\tau \in C\mathfrak{S}_T$

ssi il n'existe pas (i,j) avec même ligne au départ et même colonne à l'arrivée

- S'il existe (i,j) avec même ligne au départ et même colonne à l'arrivée

$(i,j) \in R\mathfrak{S}_T$

$(\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) \in C\mathfrak{S}_T$

$[\pi]\ (i,j)\, x\, (\pi^{-1}(i)\ \pi^{-1}(j)) = -x$

$[\pi]\, x = [(i,j)\, \pi\, (\pi^{-1}(i)\ \pi^{-1}(j))]\, x = -[\pi] x$ $\quad \boxed{\Rightarrow c_\pi = 0}$

Pour tout $y \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$

$p_\lambda y p_\lambda = \alpha_y p_\lambda$ pour $\alpha_x \in \mathbb{C}$

Lemme $V_\lambda := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] p_\lambda$ est irréductible.

Preuve : Soit W un ss-esp stable de V_λ

D'après ce qu'on a vu tt à l'heure

$$\underset{V_\lambda}{\overset{W}{\cap}} = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] p_W \quad \text{pour un certain } p_W \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$$

avec $p_W^2 = p_W$

Aussi $p_W = x_W p_\lambda$ pour $x_W \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$

On regarde

$p_\lambda . p_W = p_\lambda x_W p_\lambda = \alpha_W p_\lambda$ avec $\alpha_W \in \mathbb{C}$.

- Si $\alpha_W = 0$,

$p_W = p_W^2 = x_W p_\lambda p_W = 0 \quad \Rightarrow \quad W = \{0\}$

- Si $\alpha_W \neq 0$, $p_\lambda \in W$

$\Rightarrow \underbrace{p(\sigma) . p_\lambda}_{= \sigma . p_\lambda} \in W$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$V_\lambda = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] . p_\lambda \subset W$

Lemme (non prouvé) V_λ et V_μ sont non isomorphes.

Conséquence : On a construit TOUTES les irrép. de $\mathfrak{S}_n$

Pour calculer les caractères :

- formule de Frobenius $\leftarrow$ appr. classique
- calculer la trace de $p(\sigma)$ sur V_λ p_λ $\leftarrow$ semaine prochaine

Rq Pour 2 remplissages différents de λ, les V_λ sont isomorphes.

Objectif pour aujourd'hui Calculer $\mathrm{tr}_{V_\lambda} \rho(\pi) = \chi^\lambda(\pi)$

(Rq : $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \cdot \mu_\lambda = \mathrm{Vect}\{\sigma \cdot \mu_\lambda, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$)

pas linéairement indépendant

Déf $\varphi_{\lambda,\pi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \\ x & \longmapsto & \pi \cdot x \cdot \mu_\lambda \end{array}$

Lemme $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} \varphi_\lambda = \mathrm{tr}_{V_\lambda} \rho(\pi)$

Preuve : $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]\mu_\lambda \oplus \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n](1-\mu_\lambda)$

μ_λ projecteur

En décomposant sur ces sous-espaces, on prouve le rst $\boxtimes$

A. Une première formule pour les caractères

Calcul de $\chi^\lambda(\pi)$

$$\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\alpha_\lambda} = \frac{\mathrm{tr}(\varphi_{\lambda,\pi})}{\alpha_\lambda} = \sum_{\sigma \in R\mathfrak{S}_T} \sum_{\tau \in C\mathfrak{S}_T} \varepsilon(\tau) \, \mathrm{Tr}_{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]} \underbrace{(x \mapsto \pi . x . \sigma . \tau)}_{\text{permute la base } (e_g)_{g \in \mathfrak{S}_n} \text{ de } \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]}$$

(on cherche donc les pts fixes)

$$= \sum_{\sigma \in R\mathfrak{S}_T} \sum_{\tau \in C\mathfrak{S}_T} \varepsilon(\tau) \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \delta_{\underbrace{g = \pi g . \sigma . \tau}_{\pi = \underbrace{g\tau g^{-1}}_{\tau'} \underbrace{g\sigma^{-1} g^{-1}}_{\sigma'}}}$$

Si $\tau \in C\mathfrak{S}_T$ alors $g\tau g^{-1} \in C\mathfrak{S}_{g(T)}$

$$= \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma' \in R\mathfrak{S}_{g(T)}} \sum_{\tau' \in C\mathfrak{S}_{g(T)}} \varepsilon(\tau) \delta_{\pi = \tau' \sigma'}$$

$$= \sum_{T \text{ remplissage}} \sum_{\sigma \in RG_T} \sum_{\tau \in RG_T} \varepsilon(T)\, \delta_{\pi = \tau . \sigma}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(T) \underbrace{\# \left\{ T \,\middle|\, \begin{matrix} \sigma \in RG_T \\ \tau \in CG_T \end{matrix} \right\}}_{\overset{!!}{\cdot\cdot}\ \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)}$$

Mais α_λ ?

Posons $\pi = Id$

$$\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\alpha_\lambda} = \frac{\dim(\lambda)}{\alpha_\lambda}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \tau = \sigma^{-1}}} \varepsilon(\tau)\, \tilde{N}_{\sigma,\sigma^{-1}}(\lambda)$$

On cherche T tq $\sigma \in RG_T$ et $\sigma^{-1} \in CG_T$
$\Updownarrow$
$\sigma \in CG_T$

i.e $\sigma = Id$

Donc $N_{\sigma,\sigma^{-1}}(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq Id \\ n! & \text{si } \sigma = Id \end{cases}$

Donc $\dfrac{\dim(\lambda)}{\alpha_\lambda} = n!$ ou $\alpha_\lambda = \dfrac{\dim(\lambda)}{n!}$

Bilan $\quad n! \dfrac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \tau.\sigma = \pi}} \varepsilon(T) \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$

B. Réduire l'ensemble de sommation

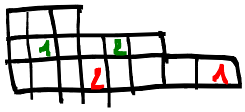
* $\pi \in \mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_n$ $(k \leq n)$

Déf Si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k^2$, $\lambda \vdash n$ $(k \leq n)$

$$\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) := \#\Big\{ \underbrace{f : \{1,\dots,k\} \to \lambda \text{ injective}}_{\sim \text{ remplissages partiels}} \text{ tq } (*) \begin{cases} f(i) \text{ et } f(\sigma(i)) \text{ sont ds } \hat{m} \text{ ligne} \\ f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ sont ds la } \hat{m} \text{ colonne} \end{cases} \Big\}$$

Ex : $k = 2$

$$\tilde{N}_{(1,2),Id}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i(\lambda_i - 1)$$



Prop

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\,\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_k \\ \tau\cdot\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

Preuve On sait que

$$n!\,\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim \lambda} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n \\ \tau\cdot\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

* cas $\mathrm{Supp}(\sigma), \mathrm{Supp}(\tau) \subset \{1,\dots,k\}$

  $\forall i > k \quad \sigma(i) = \tau(i) = i$

$$\left\{ \begin{matrix} f : \{1,\dots,n\} \text{ inj} \\ \text{qui vér } (*) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f : \{1,\dots,k\} \text{ inj} \\ \text{qui vér } (*) \end{matrix} \right\} \times \mathfrak{S}_{n-k}$$

$$\tilde{N}_{\sigma,\tau} = (n-k)!\;\tilde{N}_{\sigma|\{1,\dots,k\},\,\tau|\{1,\dots,k\}}(\lambda)$$

* cas $\mathrm{Supp}(\sigma) \not\subset \{1,\dots,k\}$ $\qquad \exists\, i > k \quad \sigma(i) \neq i$

  $\Updownarrow$

  $\mathrm{Supp}(\tau) \not\subset \{1,\dots,k\}$ $\qquad \tau(\sigma(i)) = i \Rightarrow \tau(i) \neq i$

  $\Rightarrow \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = 0$

  Si $\sigma(i) = j$, alors $\tau(j) = i$
  $f(i)$ et $f(j)$ st dans la $\hat{m}$ ligne, $\hat{m}$ col.

$$n! \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim \lambda} = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_n^2 \\ \sigma\tau = \pi \\ \mathrm{Supp}(\sigma),\ \mathrm{Supp}(\tau) \subseteq \{1,\dots,k\}}} \varepsilon(\tau)\, \tilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

$$\bar\sigma, \bar\tau = \sigma/\{1,\dots,k\},\ \tau/\{1,\dots,k\}$$

$$n! \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim \lambda} = \sum_{\substack{\bar\sigma,\bar\tau \in \mathfrak{S}_k \\ \bar\tau\bar\sigma = \pi}} \varepsilon(\bar\tau)\,(n-k)!\, \tilde{N}_{\bar\sigma,\bar\tau}(\lambda) \qquad \blacksquare$$

Ex : $\pi = (12)$

$\sigma = (12) \quad \tau = Id$

$$\tilde{N}_{(1,2),Id}(\lambda) = \sum \lambda_i(\lambda_i - 1)$$

$\sigma = Id \quad \tau = (12)$

$$\tilde{N}_{Id,(12)}(\lambda) = \sum \lambda'_i(\lambda'_i - 1) \qquad (\lambda' \text{ part conjuguée})$$

$$n(n-1)\frac{\chi^\lambda((1,2))}{\dim\lambda} = \sum \lambda_i(\lambda_i - 1) - \sum \lambda'_i(\lambda'_i - 1)$$
$$= \sum \lambda_i^2 - \sum \lambda_i'^2$$

C - Oublier injectivité

Déf

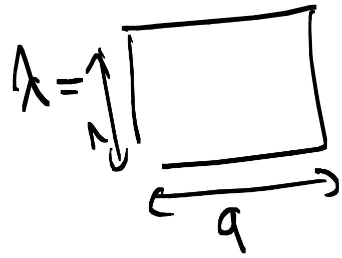
$$N_{\sigma,\tau}(\lambda) := \#\left\{ b : \{1,\dots,k\} \to \lambda \quad tq \right\}$$

$$(*) \begin{cases} b(i) \text{ et } b(\sigma(i)) \text{ sont ds m̂ ligne} \\ b(i) \text{ et } b(\tau(i)) \text{ sont ds la m̂ colonne} \end{cases}$$

Thm $\pi \in \mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_n$

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim\lambda} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_k \\ \tau\cdot\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

Ex



$N_{\sigma,\tau}(\lambda \times q) = \lambda^{|c(\sigma)|} q^{|c(\tau)|}$

On pose $\mathrm{Ch}_\pi(\lambda) = n(n-1)\cdots(n-k+1)\, \dfrac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)}$

on "inverse" π et λ = approche duale

de manière à ce que

$$\mathrm{Ch}_\pi(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_k \\ \tau\circ\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\, N_{\sigma,\tau}(\lambda)$$

A - Factorisations et cartes

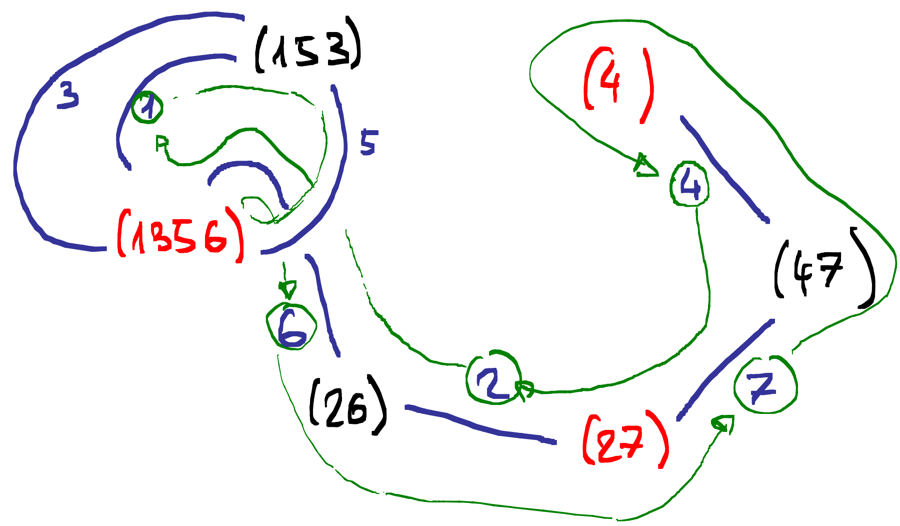
Paire de permutation dans $\mathfrak{S}_k$ $\longleftrightarrow$ Graphes bipartis avec k arêtes étiquetées (sur $\{1,\dots,k\}$) + système de rotation

coloration fixée

(pas nécessairement connexe, i.e union de cartes)

$\sigma = (153)(26)(47)$

$\tau = (1356)(27)(4)$



Intérêts

* $N_{\sigma,\tau}$ ne dépend que du graphe simple sous-jacent.

* On peut lire $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{comp}}}{\tau \circ \sigma}$ sur la carte

$$\tau \circ \sigma = (4\ 2\ 1\ 6\ 7)\,(5)\,(3)$$

cycles $\Longleftrightarrow$ faces

Cas $\pi = c := (1 \dots k)$

$$\{\sigma, \tau \in S_k^2 \mid \tau \circ \sigma = \pi\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{cartes biparties avec} \\ k \text{ arêtes enracinées} \\ \text{unicellulaires.}\end{array}\right\}$$

(choisir arête 1 $\Leftrightarrow$ choisir tt l'étiquetage.

Rappel $\quad N_{\sigma,\tau}\Big(\underbrace{(q, \dots, q)}_{p \text{ parts}}\Big) = p^{|C(\sigma)|}\, q^{|C(\tau)|}$

d'où $\quad \theta_c\big((q,\dots,q)\big) = (-1)^k \displaystyle\sum_{\substack{M \text{ cartes} \\ k \text{ arêtes} \\ \text{unicellulaires}}}' (-1)^{|V_\circ(M)|}\, p^{|V_\circ(M)|}\, q^{|V_\bullet(M)|}$

$$\overset{[\text{Jackson}, 1988]}{=} (-1)^k\, k! \sum_{r,s \geq 1} \binom{k-1}{r-1,\ s-1,\ k+1-r-s} \binom{p}{r} \binom{-q}{s}$$

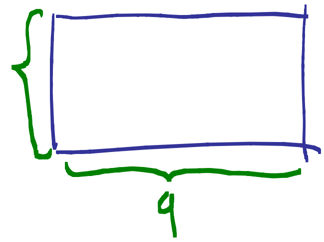
Rq Jackson utilise formule

$$\#\underset{\dots}{\text{cartes}} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\mu)\,\chi^\lambda(\nu)\,\chi^\lambda(\rho)}{\dim(\lambda)}$$

B. Fonctions $N_{\sigma,\tau}$

$$N_{\sigma,\tau}(\lambda) = \#\{f : \{1,\dots,k\} \longrightarrow \underset{\substack{\text{ensemble} \\ \text{de cases}}}{\lambda} \text{ condition } (*)\}$$

où $\quad (*) : \forall i \quad$ $f(i)$ et $f(\sigma(i))$ st ds la m̂ ligne
$f(i)$ et $f(\tau(i))$ st ds la m̂ colonne

$\lambda = p \times q =$ 

Soit f qui vérifie $(*)$

On peut définir une fct° h_λ et h_C :

* $h_\lambda : C(\sigma) \to R(\lambda)$ ← ens des lignes de λ
* $h_c : C(\tau) \to Col(\lambda)$ ← — colonnes de λ

Réciproquement, étant donné h_λ et h_c on définit

$$f(i) = (h_\lambda(c_1), h_c(c_2)) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} c_1 \in C(\sigma) \\ i \in c_1 \\ c_2 \in C(\tau) \\ i \in c_2 \end{array}$$

Cas λ rectangle

$$\{f \text{ vérifie } (*)\} \simeq \{(h_\lambda, h_c)\}$$

Corollaire $N_{\sigma,\tau}(p \times q) = p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|}$

Déf Un couple (h_λ, h_c) vérifie $(*)_k$

si $\forall\, 1 \leq i \leq k \quad (h_\lambda(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda \quad \begin{array}{l} c_1 \in C(\sigma) \\ i \in c_1 \\ c_2 \in C(\tau) \\ i \in c_2 \end{array}$

$\iff \forall\, c_1 \in C(\sigma), c_2 \in C(\tau) \quad (h_1(c_1), h_2(c_2)) \in \lambda$

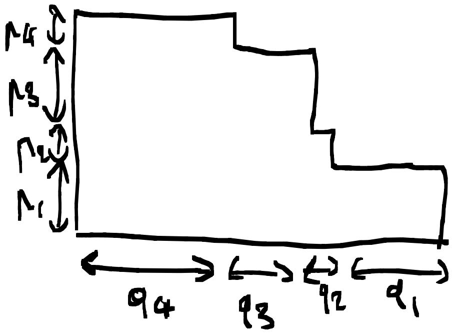
$c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$

Lemme λ général,

$$\{ f \text{ qui vérifie } (*) \} \simeq \{ (R_\lambda, R_c) \text{ vér } (*)_R \}$$

C- Coordonnées multirectangulaires

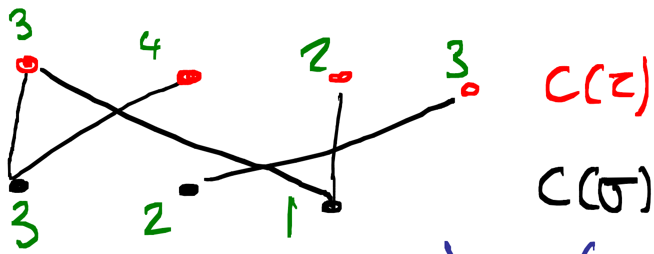
À 2 suites $(p_1, \dots, p_m)$ et $(q_1, \dots, q_m)$ d'entiers positifs, on associe

$\lambda(p,q) =$ 

Prop

$$N_{\sigma,\tau}(\lambda(p,q)) = \sum_{\varphi} \prod_{\bullet \in V_\bullet(G)} p_{\varphi(\bullet)} \prod_{\circ \in V_\circ(G)} q_{\varphi(\circ)}$$

$\sigma, \tau \rightsquigarrow$ graphe $G_{\sigma,\tau}$ simple sous-jacent à la carte de H à l'R



$(c_1, c_2) \in E(G_{\sigma,\tau})$ si $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$

$\rightarrow p_1 p_2 p_3 q_2 q_3^2 q_4$

$\varphi : V_G \to \{1, \dots, m\}$ "croissante"

si $(c_1, c_2) \in E(G)$

$\varphi(c_1) \leq \varphi(c_2)$

Déf

$$F_G(x_1, x_2, x_3, \dots) = N_G(\lambda(p,q)) \Big|_{\substack{p_i = x_i \\ q_i = -x_i}}$$

série génératrice mult des fct° croissantes

$\rightarrow \oplus$ classique.

Rappels $\pi \in \mathfrak{S}_k$, $\lambda \vdash n$, on note $\mu =$ type cyclique(π)

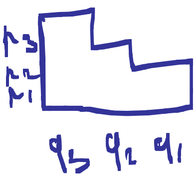
+ $Ch_\mu(\lambda) = n(n-1)\dots(n-k+1)\dfrac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)}$

- Si $k \leq n$, $\pi \in \mathfrak{S}_k \subset \mathfrak{S}_n$

$k > n$, $n(n-1)\dots(n-k+1) = 0$

$Ch_\mu(\lambda) = 0$

$$N_G(\lambda(p,q)) = \sum_{\substack{\varphi \\ \text{croissante}}} \prod_{\bullet \in V_\bullet(G)} p_{\varphi(\bullet)} \prod_{\circ \in V_\circ(G)} q_{\varphi(\circ)}$$

$\lambda(p,q) =$ 

$Ch_\mu, N_G \in \underbrace{\mathcal{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{C})}_{\substack{\text{fct° de l'ens} \\ \text{des diag de Young } \mathcal{Y} \\ \text{dans } \mathbb{C}.}}$

Th : π perm de $\mathfrak{S}_k$ de type cyclique μ

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_k^2 \\ \sigma\cdot\tau = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{G_{\sigma,\tau}}$$

A _ Algèbre Vect(N_G)

Rq $N_G \times N_{G'} = N_{G \sqcup G'}$

Cor Vect(N_G) sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{C})$

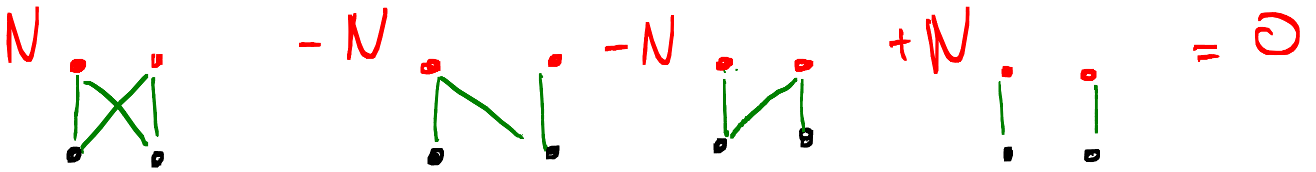
$N_G(\lambda(p,q))$ est un "polynôme" en p et q

Prop $\{F \in \mathcal{F}(\mathcal{Y}, \mathbb{C}) \text{ tq } F(\lambda(p,q)) \text{ "polynôme"}\} = \text{Vect}(N_G)$

(pas de preuve)

Questions . Quelle relation entre les N_G ?

Prop

 (R)

Preuve : $N_G = \sum_{\varphi : V_G \to \mathbb{N}^*} \delta_\varphi \text{ croissante } \underbrace{\prod p\,\varphi(v_m) \prod q\,\varphi(v_n)}_{M_\varphi}$

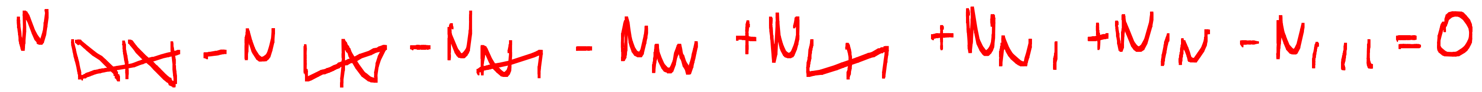
Contribut° d'une fct° φ donnée à LHS de (R) :

$$M_\varphi\left(\delta_{\varphi \nearrow \text{ sur } \bowtie} - \delta_{\varphi \text{ croissante sur } N} - \delta_{\varphi \nearrow \text{ sur } И} + \delta_{\varphi \nearrow \text{ sur } ||}\right)$$

+ Si $i > k$ ou $j > l$, ts les δ st nuls $\Rightarrow$ contribut° totale nulle
+ Si $i \leq l$, $\delta_{\bowtie} = \delta_N$ et $\delta_{И} = \delta_{||}$
+ Si $j \leq k$ $\delta_{\bowtie} = \delta_{И}$ et $\delta_N = \delta_{||}$
+ Sinon, $i \leq k < j \leq l < i$. ∎

Prop Plus généralement,

- Ajout des m̂ arêtes/sommets à ts les graphes
- Cycles les plus longs :



ou

Prop Soit G un graphe biparti
C un cycle ds graphe
E l'ensemble d'une arête sur 2 ds le cycle (2 choix)

$$\sum_{E' \subset E} (-1)^{|E'|} N_{G \setminus E'} = 0$$

"relation d'inclusion-exclusion cyclique"

Prop $\mathrm{Vect}(G)/_{\text{ind-excl}}^{\text{cyclique}} \simeq \mathrm{Vect}(N_\sigma)$

Il n'y a pas d'autres relations.

Rappel : $F_\sigma = N_\sigma(p, q) \big| \begin{smallmatrix} p_i = x_i \\ q_i = x_i \end{smallmatrix}$

Du coup, vraie pour F_G.

B. Algèbre $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$

$Ch_{(2)} \cdot Ch_{(2)} \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$?

$$Ch_{(2)}(\lambda) = n(n-1)\frac{\chi^\lambda((1.2))}{\dim(\lambda)}$$

Quest° : $\chi^\lambda(\sigma) . \chi^\lambda(\sigma') = ?$ Pas de formule simple!

$$\chi^\lambda(\sigma) = \mathrm{Tr}(\rho^\lambda(\sigma))$$

Lemme : Si $x \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, x central

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad x.\sigma = \sigma.x$

alors $$\rho^\lambda(x) = \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim \lambda} \mathrm{Id}$$

(provient du lemme de Schur)

Corollaire Si $x, y \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, x, y centraux

$$\frac{\chi^\lambda(x.y)}{\dim \lambda} = \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim \lambda} . \frac{\chi^\lambda(y)}{\dim \lambda}$$

Astuce : $$Ch_{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda\Big(\sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \neq j}} (i\,j)\Big)$$

$$Ch_{(2)}(\lambda) . Ch_{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda\Big(\Big(\sum_{\substack{1 \le i,j \le n \\ i \neq j}} (i\,j)\Big) . \Big(\sum_{\substack{1 \le k,l \le n \\ k \neq l}} (k\,l)\Big)\Big)$$

$Ch_{(2)}(\lambda) \cdot Ch_{(2)}(\lambda) =$

$$\frac{1}{\dim \lambda} \chi^\lambda \Big(\sum_{\substack{1 \le i,j,k,l \le n \\ i,j,k,l \\ \text{distincts}}} (i\,j)(k\,l) + 4 \sum_{\substack{i,j,l \\ \text{distincts}}} (i\,l\,j) + 2 \sum_{\substack{i,j \\ \text{distincts}}} Id \Big)$$

$$= Ch_{(2,2)}(\lambda) + 4\, Ch_{(3)}(\lambda) + 2\, Ch_{(1,1)}(\lambda).$$

Prop : Vect (Ch_μ) algèbre.

Rappel $\mu \vdash k$, $\pi \in S_k$ de type μ

- $Ch_\mu(\lambda) = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1)\dfrac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} \\ 0 \text{ si } |\lambda| < k \end{cases}$

Ch_μ fonction sur tous les diagrammes

Prop : Vect (Ch_μ) algèbre

A - Description de Vect (Ch_μ) en tant que fonctions symétriques décalées.

Prop Soit $f \in$ Vect(Ch_μ)

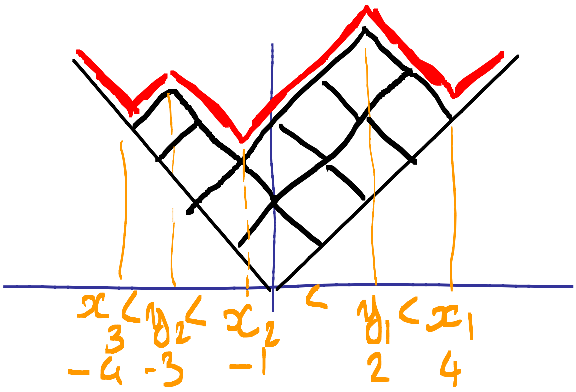
- $(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \mapsto f((\lambda_1, \dots, \lambda_l))$ est un polynôme f_l en $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ symétrique en $\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 2, \dots, \lambda_l - l$
- compatibilité $f_{l+1}(\lambda_1, \dots, \lambda_l, 0) = f_l(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$

Réciproquement, si on prend une suite $(f_l)_{l \ge 1}$ avec ces 2 prop, elle définit une fonction dans Vect (Ch_μ).

Rq (1) et (2) définissent les fonctions symétriques décalées.

À partir des coordonnées entrelacées

À la russe :



$$\lambda = (4,4,1,1)$$

Rq $\sum_{i=1}^{n+1} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$

Déf $t_k(\lambda) := \sum_{i=1}^{m+1} x_i^k - \sum_{i=1}^{m} y_i^k$ pour $k \geq 2$.

t_k sont des fonctions sur l'ens des diag de Young

Prop $\mathrm{Vect}(\mathrm{Ch}_\mu) \underset{\text{(unicité)}}{=} \mathbb{C}[t_2, t_3, t_4, \dots]$

i.e. • alg est générée par les $(t_k)_{k\geq 2}$,

• les $(t_k)_{k \geq 2}$ alg indépendants.

PAS DE Preuve :

En fait

$t_k(\lambda) =$ "fct° puissance $(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$"

"fct° puissance $(\mathbb{X} + \mathbb{Y})$" $= \sum_i x_i^k + \sum y_i^k$

$=$ fct° puiss$(\mathbb{X})$ $+$ fct° puiss$(\mathbb{Y})$

d'où

fct° puiss$(\mathbb{X})$ $=$ fct° puiss$(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$ $+$ fct° puissance$(\mathbb{Y})$

Cor $\mathrm{Vect}(Ch_\mu) = \mathrm{Sym}(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$.

Rappel $F_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\substack{\varphi : G \to \mathbb{N}^* \\ \varphi \text{ croissante}}} \prod x_{\varphi(i)}$

ex : $F_{\bowtie} = \sum_{i,j \leq k,l} x_i x_j x_k x_l$

lemme : $N_G(\lambda) = (-1)^{|V_\circ|} F_G(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$

$\triangle$ $F_G \notin \mathrm{Sym}$.

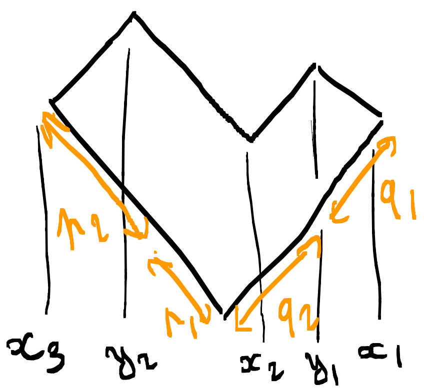
$$Ch_\mu(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{G_{\sigma,\tau}}(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma.\tau = \pi}} \varepsilon(\tau)(-1)^{|V_\circ|} F_{G_{\sigma,\tau}}(\mathbb{X} - \mathbb{Y})$$

où π perm de type μ

Question : $\sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma.\tau = \pi}} F_{G_{\sigma,\tau}}$ est-elle symétrique ?

ça implique ça

Quelques

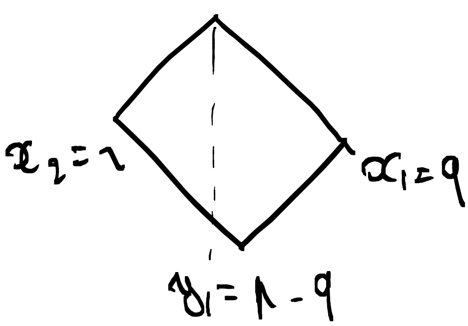


$r_1 = x_1 - y_1$

$r_2 = x_2 - y_2$

$q_1 = y_1 - x_2$

$q_2 = y_2 - x_3$



$$Ch_{(1)}(\lambda) = n \frac{\chi^\lambda(Id)}{\dim(\lambda)} = n \quad -\frac{t_2(\lambda)}{2}$$

$$t_2(\lambda) = x_1^2 - y_1^2 + x_2^2$$
$$= 2rq = 2n$$

$$Ch_{(2)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{\lambda_1} \lambda_i'^2$$

$$= pq^2 - p^2 q$$

$$t_3(\lambda) = -(q-p)^3 + p^3 - q^3$$

$$= 3pq^2 - 3p^2q.$$

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\nu \text{ partit}^\circ \\ \ell = \ell(\nu) \\ \text{ss-parts} \neq 1}} \alpha_\nu^N \, t_{\nu_1} \cdots t_{\nu_\ell}$$

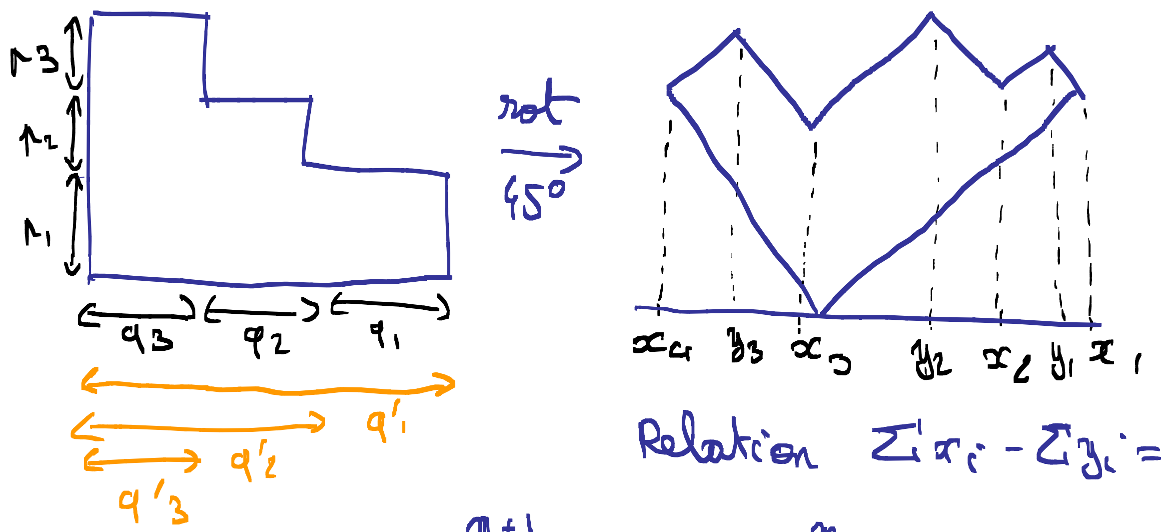
Rappels : $Ch_\mu(\lambda) := n(n-1)\dots(n-k+1) \dfrac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim \lambda}$

$n = |\lambda| \qquad k = |\mu|$

On a :

- décrit l'alg Vect (Ch_μ)

  - Une base algébrique est donnée par les $(t_k)_{\geq 2}$ où



Relation $\sum x_i - \sum y_i = 0$

$$t_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{m+1} x_i^k - \sum_{i=1}^{m} y_i^k$$

- ou que $$Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathfrak{S}_k^2 \\ \sigma.\tau = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{G_{\sigma,\tau}}$$

Changements de coordonnées

$$x_i = q'_i - p_1 - \cdots - p_{i-1}$$

$$y_i = q'_i - p_1 - \cdots - p_i$$

$$t_k(\lambda) = \sum_{i=1}^m x_i^k - y_i^k + x_{m+1}^k$$

Lemme : Soient $i_1, \dots, i_\ell \geq 2$, ν en parts ≥ 2

$$[p_1 q_1'^{i_1-1} \cdots p_\ell q_\ell'^{i_\ell-1}] t_{\nu_1} \cdots t_{\nu_\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \lambda_i(i_1,\dots,i_\ell) \\ z_\nu & \text{si } \nu = \lambda_i(i_1,\dots,i_\ell) \end{cases}$$

où $z_\nu = \prod m_j(\nu)! \prod \nu_j$.

Preuve : 2 observations

- $t_k(\lambda)$ n'a aucun monôme avec seulement des q'_i

$$t_k(\lambda) = \sum_{i=1}^m \underbrace{(x_i - y_i)}_{p_i}(x_i^{k-1} + x_i^{k-2} y_i + \cdots + y_i^{k-1}) + \underbrace{x_{m+1}^k}_{-p_1 - \cdots - p_m}$$

- Si un monôme contient un q'_j, il doit contenir le p'_j correspondant car q'_j vient du j-ième terme de la somme.

- Un monôme de t_k ne peut contenir q'_{j_1} et q'_{j_2} avec $j_1 \neq j_2$

$p_1 q_1'^{\,i_1-1}$ vient de $t_{\nu_{\sigma(1)}}$ pour un certain $\sigma(1)$

$\vdots$

$p_\ell q_\ell'^{\,i_\ell -1}$ vient de $t_{\nu_{\sigma(\ell)}}$ pour un certain $\sigma(\ell)$

$$\Downarrow$$

σ est une permutation.

$t_k = (k-1) \sum_{i=1}^{m} p_i q_i'^{\,k-1}$ + termes avec $\deg_p > 1$.

$\Rightarrow \nu_{\sigma(1)} = i_1 \; \ldots \; \nu_{\sigma(\ell)} = i_\ell$

Condition nécessaire : il faut que ν soit une permutation de i.

On admet le cas $\nu = \text{tri}(i_1, \ldots, i_\ell)$. $\blacksquare$

Développons Ch_μ sur les t_k

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\nu \\ \ell = \ell(\lambda)}} a_\nu^\mu \, t_{\nu_1} \cdots t_{\nu_\ell}$$

Corollaire $\quad a_\nu^\mu = \dfrac{1}{z_\nu} \left[p_1 q_1'^{\,\nu_1 - 1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\,\nu_\ell - 1} \right] Ch_\mu(\lambda(p, q'))$

Preuve : Égalité $\bar{\imath}$ fct° sur diag de Young $\Rightarrow$ ég $\bar{c}$ "polynôme" en p et q'.

$$Ch_\mu(\lambda(p, q')) = \sum_{\substack{\nu' \\ \ell = \ell(\nu')}} a_{\nu'}^\mu \, t_{\nu_1'} \cdots t_{\nu_\ell'}$$

on prend coeff de $[p_1 q_1'^{\,\nu_1-1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\,\nu_\ell -1}]$

$[p_1 q_1'^{\,\nu_1 -1} \cdots p_\ell q_\ell'^{\,\nu_\ell -1}] Ch_\mu = z_\nu a_\nu^\mu$ (le seul terme de la somme qui survit est $\nu' = \nu$)

- C'est une interprétation combinatoire

$\Rightarrow \ sg(a^\mu_v) = (-1)^{k+\sum_i (v_i - 1)} = (-1)^{k+|v|-\ell(v)}$

$$Ch_\mu(\lambda(p,q)) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k \\ \sigma\tau = \pi}} \underbrace{\varepsilon(\tau)}_{\substack{\| \\ (-1)^k (-1)^{|c(\tau)|} \\ \| \\ (-1)^k \deg_q(\ldots)}} \underbrace{N_{G_{\sigma,\tau}}}_{\text{positif en } p \text{ et } q}$$

(et même en p et q')

$\deg_q(N_{G_{\sigma,\tau}}) = |c(\tau)|$

B - Graduation

Soit $X \in \mathrm{Vect}(N_G)$

$\deg(X) := \deg_{p_i,q_i}(X(\lambda(p,q)))$

$\deg(t_k) = k$ (t_k homogène)

$\deg(N_G) = |V_G|$ (homogène)

$$Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in S_k^2 \\ \sigma.\tau = \pi}} \varepsilon(\tau) \ N_{G_{\sigma,\tau}}$$

or $|V_{G_{\sigma,\tau}}| = |c(\sigma)| + |c(\tau)|$

Lemme Si $\sigma.\tau = \pi$, $|c(\sigma)| + |c(\tau)| \leq k + |c(\pi)|$

Preuve Notons $n(\sigma) = k - |c(\sigma)|$

$n(\sigma)$ est le nb minimal de transpositions nécessaires pour écrire σ

$\Rightarrow n(\pi) \leq n(\sigma) + n(\tau)$ ∎

$\deg(Ch_\mu) = |\mu| + \ell(\mu)$ (⚠ non homogène)

Question : Composante de + haut degré ?

Cas $\mu = (k)$ $\pi = (1 \dots k)$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma, \tau & \sigma.\tau = \pi \\ |C(\sigma)| + |C(\tau)| = k+1 & \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{arbres enracinés} \\ \text{(bicoloriés)} \end{array} \right\}$$

cartes avec $k+1$ sommets
k arêtes

Le terme dominant de $Ch_{(k)}$ est

$$R_{k+1} = \sum_{\substack{T \text{ arbres} \\ \text{enracinés}}} (-1)^k (-1)^{|V_\circ(T)|} N_T .$$

Rappels :

Ch_μ → fct° sur les diagrammes de Young

Ch_μ → caractère sur une perm π de type μ (bien renormalisé)

$\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$ → algèbre

$\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$ → base algébrique $t_2, t_3, t_4, \dots$

$$Ch_{(k)} = \sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{bipartie} \\ \text{unicellulaire} \\ \text{enracinée} \\ \text{avec } k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_\circ(M)|} \underbrace{N_{G(M)}}_{\substack{\text{graphe} \\ \text{sous-jacent} \\ \text{à la carte}}}$$

Def

$$R_{k+1} := \sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{bipartie} \\ \text{unicellulaire} \\ \text{enracinée} \\ \text{avec } k \text{ arêtes} \\ \text{et } k+1 \text{ sommets}}} (-1)^k (-1)^{|V_\circ(M)|} N_{G(M)}$$

= arbres plans enracinés

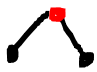
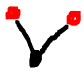
Prop $\{R_2, R_3, R_4, \dots\}$ est une base alg de $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$

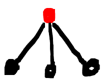
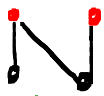
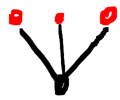
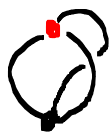
- On peut écrire explicitement passages $\begin{cases} \text{de } R \text{ à } t \\ \text{de } t \text{ à } R \end{cases}$

- **Question**: Dvt de Ch_μ sur base des R ?

Ex $\mu = (k)$ pour des petites valeurs de k.

$Ch_{(1)} = N$  $= R_2$

$Ch_{(2)} = -N$  $+ N$  $= R_3$

$Ch_{(3)} = N$  $- 3\,N$  $+ N$  $+ N$ 

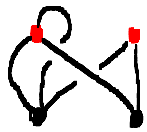
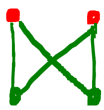
enracinements

unicellulaire

$\underbrace{}_{R_4}$ $\underbrace{}_{= N \text{ (img) } = R_2}$

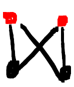
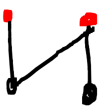
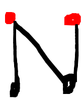
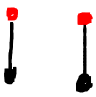
N  $= R_2$

$= R_4 + R_2$

$Ch_{(5)} = \dots - 5\,N$  $= N$ 

(**Rappel** : $N_G \cdot N_{G'} = N_{G \sqcup G'}$
$R_{v_1} \dots R_{v_\ell} = \sum_{G \text{ certaines forêts}} \pm N_G$)

Inclusion-exclusion cyclique

N  $= N$  $+ N$  $- N$ 

$R_2 \cdot R_2$

Avec des graphes ⊕ compliqués, il peut y avoir plusieurs inc-exc possibles → devient compliqué

On sait qu'il existe des entiers uniques b_ν^μ tq

$$\mathrm{ch}_\mu = \sum_{\substack{\nu \text{ partition} \\ \text{ss parts égales} \\ \text{à } 1}} b_\nu^\mu \, R_{\nu_1} \cdots R_{\nu_\ell}$$

Idée : Construire une fonction $I_\nu : \mathrm{Vect}(N_G) \to \mathbb{C}$ tq

$$I_\nu(R_{\nu'_1} \cdots R_{\nu'_\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq \nu' \\ \neq 0 & \text{si } \nu = \nu' \end{cases}$$

fct° sur $\underbrace{\mathrm{Vect}(N_G)}_{\substack{\wr \\ \mathrm{Vect}(G)/\text{rel d'exc-inc-cycliq}}}$ = fct° sur $\mathrm{Vect}(G)$ qui s'annule sur les relat° d'exc-incl

Déf Soient $V_\circ$ un ensemble et $k : V_\circ \to \mathbb{N}^*$

Un graphe G bip. avec ens de sommets $V_\circ$ est k-expanseur si :

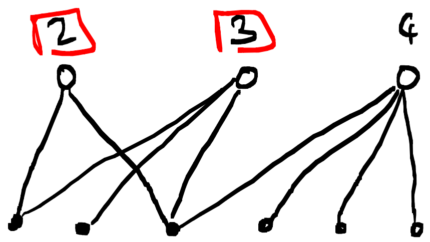
- $\sum_{\circ \in V_\circ} k(\circ) = |V_G|$
- $\forall V \subset V_\circ$

$$|\overline{\mathcal{V}}(V)| \geq \sum_{\sigma \in V} k(\circ)$$

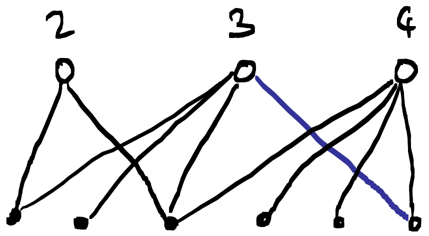
voisinage fermée

avec une inégalité stricte qd $\overline{\mathcal{V}}(V)$ n'est pas une union de c-c de graphes

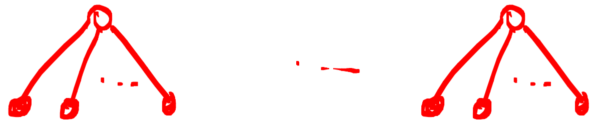
Ex



n'est pas k-expanseur

 est h - expanseur

Lemme Une forêt F est h-expanseur

ssi $F =$ 

et $h(o) =$ taille de sa c.c.

Notons $\mathrm{sgexc}_G^h = (-1)^{cc(G)} \begin{cases} 1 & \text{si } G \text{ est } h\text{-expanseur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Lemme G avec cycle C.

Notons E un demi-ens des arêtes des cycles.

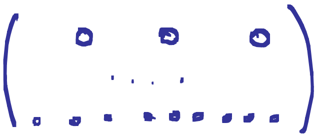
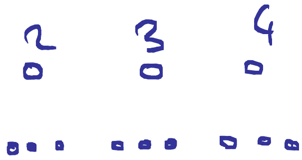
(Rappel incl-excl cyclique $\sum_{E' \subset E} (-1)^{E'} N_{G \setminus E'} = 0$)

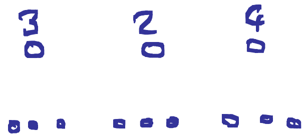
Alors $\sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} \mathrm{sgexc}_{G \setminus E'}^h = 0$

Preuve : Compliquée.

Fixer une partition ν

$$I_\nu(G) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell(\nu) \neq |V_o(G)| \\ \sum\limits_{\substack{h : V_o \to \mathbb{N}^* \\ \text{multiensemble } h(V_o) = \text{multi-ensemble}(\nu_i)}} \mathrm{sgexc}_G^h \end{cases}$$

$I_{(4,3,2)}$  $= (-1)^{cc(G)} \Big([$  est expanseur $]$

$+ [$  est expanseur $]$

$+ \dots \Big)$

$\to$ on a défini I_U sur $\mathrm{Vect}(N_G)$

$$I_U(R_{U_1'} \dots R_{U_\ell'}) = \begin{cases} 0 & \text{si } U \neq U' \\ \underset{\uparrow \text{ facteur explicite}}{\neq 0} & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Conclusion</u> $\quad \theta_U^\mu = \underset{\uparrow \text{ facteur expl.}}{*} \; I_U(\mathrm{Ch}_\mu)$

$$= * \sum_{\sigma, \tau = \#} \epsilon(\tau) \; I_U(G_{\sigma,\tau})$$

Ds cas $\mu = (k)$, les signes disparaissent

$\Rightarrow$ les coeffs $\theta_U^{(k)} > 0$ (avec interprétat° combinatoire)

<u>Récapitulation</u> :

$\mathrm{Ch}_\mu \leftarrow$ caractère normalisé

3 interprétations combinatoire

- N_G
- t_R
- R_R

$\Rightarrow$ graphes dessinés sur des surfaces orientées

On peut définir une déformation $\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)}$ tq $\mathrm{Ch}_\mu^{(1)} = \mathrm{Ch}_\mu$

$$\underset{\uparrow \text{ algèbre}}{\mathrm{Vect}(\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)})} \simeq \mathrm{Vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$$

Pr $\alpha = 2$, remplacer "surfaces orientées" par "surfaces quelconques".

α quelconque ?

Ivanov, Olshanski 2003 selon Kerov

Gds diagrammes sous la mesure de Plancherel

A - Définition du problème

Déf Soit $n \geq 1$. La mesure de Plancherel est la mesure de proba sur $\mathcal{Y}_n$ définie par

ens des part. de n

Si $\lambda \vdash n$ $\quad p_n(\lambda) = \dfrac{(\dim V_\lambda)^2}{n!}$

tableaux standards de forme λ

Rappel : $\sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda)^2 = n!$

Description combinatoire :

- prenez une perm. de taille n uniformément

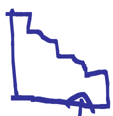
- appliquer RSK $\to (T_1, T_2)$
- garder forme commune λ

$\to$ on obtient une part. aléatoire dont la distribution est la mesure de Plancherel.

Problème : prendre, pour chaque n, un diagramme $\lambda^{(n)}$
Que peut-on dire de $\lambda^{(n)}$, qd $n \to \infty$?

Renormalisation

Déf $T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})$ diagramme $\lambda^{(n)}$ dessiné avec des cases $\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$



aire totale $= 1$

Observation : Si $F \in \mathrm{Vect}(N_G)$, $F\left(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})\right)$ est bien définie

$\lambda^{(n)}$ a pour coordonnées multi-rect $p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)}, q_1^{(n)}, \dots, q_m^{(n)}$

$T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})$ ——————— $\frac{p_1^{(n)}}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{p_m^{(n)}}{\sqrt{n}}, \frac{q_1^{(n)}}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{q_m^{(n)}}{\sqrt{n}}$

$$F\left(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})\right) = F(\lambda(p,q))\Big|_{\substack{p_i = p_i^{(n)}/\sqrt{n} \\ q_i = q_i^{(n)}/\sqrt{n}}}$$

Si F homogène de degré d, $F\left(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})\right) = \frac{1}{n^{\frac{d}{2}}} F(\lambda^{(n)})$

Que veut dire "convergence de diagramme" ?

- $\exists$ notion "géométrique"
- Si $F \in \mathrm{Vect}(N_G)$, $F\left(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})\right)$ converge-t-elle ? en loi/proba

"Convergence faible"

On va voir "assez facilement" que si $F \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$, $F(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)}))$ converge en loi/proba.

B - Graduation

Si $X \in \mathrm{Vect}(N_G)$

$$\deg(X) := \deg_{p,q}(\lambda(p,q))$$

on a vu que $\cdot\ \deg(R_k) = k$.

(Rappel : $(R_k)_{k\geq 2}$ base algébrique de $\mathrm{Vect}(Ch_\mu)$)

- $\deg(Ch_\mu) = |\mu| + \ell(\mu)$
- $\deg(Ch_{(k)} - R_{k+1}) = k-1$
- $\deg\left(Ch_\mu - \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} R_{\mu_i+1}\right) = |\mu| + \ell(\mu) - 2$

Autrement dit, terme dominant de $Ch_{(2,2)}$ est $R_3 . R_3$.

Corollaire : Si $X \in \mathrm{Vect}(Ch_\mu)$ $\quad X = \sum_\mu a_\mu Ch_\mu$

$$\deg X = \underbrace{\max_{\mu : a_\mu \neq 0} |\mu| + \ell(\mu)}_{= d}$$

Preuve : $\deg X \leq \max_{\mu | a_\mu \neq 0} |\mu| + \ell(\mu)$

Regardons terme de degré d de X

$$\mathrm{Dom}_d(X) = \sum_{\substack{\mu \\ |\mu| + \ell(\mu) = d}} a_\mu \, \mathrm{Dom}_d(Ch_\mu)$$

$$= \sum_{\substack{\mu \\ |\mu| + \ell(\mu) = d}} a_\mu \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} R_{\mu_i+1} \neq 0$$

car au moins un $a_\mu \neq 0$

C - Convergence des $F(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda_n))$

Lemme $\mu \vdash k$

$$\mathbb{E}_{P_n}\left(Ch_\mu(\lambda^{(n)})\right) = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1) & \text{si } \mu = (1^k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappel : $$Ch_\mu(\lambda) := \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1) \dfrac{\chi^\lambda(\mu . 1^{n-k})}{\dim(V_\lambda)} \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases} \qquad n = |\lambda|,\ k = |\mu|$$

Preuve : $$\mathbb{E}_{P_n}\left(Ch_\mu(\lambda^{(n)})\right) = n(n-1)\dots(n-k+1)\, \mathbb{E}_{P_n}\left(\frac{\chi^\lambda(\mu . 1^{n-k})}{\dim(V_\lambda)}\right)$$

$k \leq n$

$$= n(n-1)\dots(n-k+1) \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim V_\lambda)^2}{n!} \frac{\chi^\lambda(\mu . 1^{n-k})}{\dim(V_\lambda)}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} \underbrace{\sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda)\, \chi^\lambda(\mu . 1^{n-k})}_{Tr_{\oplus V_\lambda^{\dim \lambda}}\, \rho(\mu . 1^{n-k}) = \chi^{reg}(\mu . 1^{n-k})}$$

$$= \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1) & \text{si } \mu . 1^{n-k} = 1^n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Lemme Si $X \in Vect(Ch_\mu)$

$$E_{P_n}(X(\lambda^{(n)})) = O(n^{\deg(x)/2})$$

Preuve :

- vrai pour Ch_μ
- Si $X = \sum_\mu a_\mu Ch_\mu$

$$\mathbb{E}_{P_n}(X(\lambda^{(n)})) = \sum_k a_{(1^k)}\, n(n-1)\dots(n-k+1) = O(n^{\deg(X)/2})$$

$\blacksquare$

Regardons les R_k

$$E_{\mu_n}(R_{k+1}(\lambda^{(n)})) = E_{\mu_n}(Ch_{(k)}(\lambda^{(n)})) + O(n^{\frac{k-1}{2}})$$

$$E_{\mu_n}(R_{k+1}(\lambda^{(n)})^2) = E_{\mu_n}(Ch_{(k,k)}(\lambda^{(n)})) + O(n^{k})$$

$$E_{\mu_n}(R_{k+1}(T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)}))) = \frac{1}{n^{\frac{k+1}{2}}}\left(E_{\mu_n}(Ch_{(k)}(\lambda^{(n)})) + O(n^{\frac{k+1}{2}})\right) = O(n^{-1}) \text{ si } k \geq 2.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}_{\mu_n}(R_{k+1}^2(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)}))) = O(n^{-1}) \text{ si } k \geq 2$$

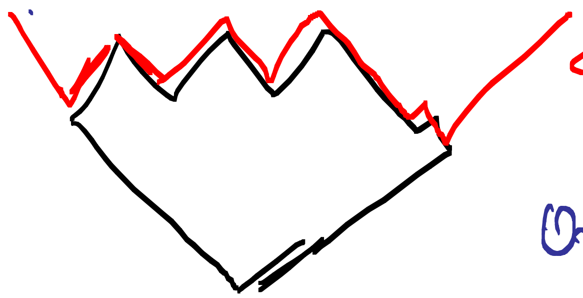
· ~~Prop~~ Si $k \geq 2$ $\quad R_{k+1}(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})) \xrightarrow[n]{} 0$ si $k \geq 2$

Rq : $R_2(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})) = 1$

Cor Si $F \in \mathrm{Vect}(Q_\mu)$, $F(T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)}))$ converge en proba.

- $4^{\text{ème}}$ mom. $\to$ CV presque sûre .
- cumulants $\to$ fluctuations gaussiennes

D. Convergence "géométrique"



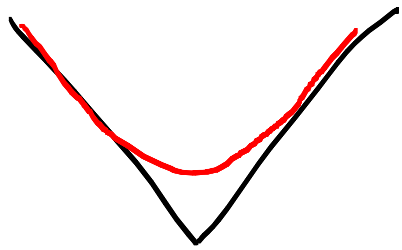
rotation à la russe

graphe d'une fonction $\omega_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On peut définir

$$\omega_{T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^{(n)})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$\Omega(x) := \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq 2 \\ \frac{2}{\pi}\left(x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2}\right) & \text{si } |x| \leq 2 \end{cases}$$



Th En proba $\quad \| \omega_{T_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(\lambda^n)} - \Omega \|_\infty \to 0$.

- On peut définir $F(\Omega)$ pour $F \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$

un calcul $\quad R_2(\Omega) = 1$

$R_k(\Omega) = 0$ pour $k \geq 3$.

$\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 1-lip.

$\omega(x) = |x|$ pour x assez grand

$$\sigma(x) = \frac{\omega(x) - |x|}{2}$$

$$t_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(k-1)\, x^{k-2}\, \sigma(x)\, dx$$

Lemme $\exists\, c > 0$

Si $\lambda^{(n)}$ dist sous P_n

t.q. $\quad P\left(\lambda_1^{(n)}, \ell(\lambda_1^{(n)}) \leq c\sqrt{n}\right) \to 1$