

## Séance 4:

grands diagrammes de Young.

Une généralisation de toute la théorie?

2 parties assez indépendantes

Rappel : rep de  $G \cong$  morphisme  $G \rightarrow GL(V)$ irrep de  $S_n \leftrightarrow$  partitions  $\lambda \vdash n$ 

## I Gds diagrammes de Young

## (A) Définition du problème

Déf: Soit  $n \geq 1$ . La mesure de Plancherel sur  $\mathcal{Y}_n$  est  
~~la~~ mesure de proba sur  $\mathcal{Y}_n$  (= ens des diag de taille  $n$ )  
 (= ens des part. de  $n$ )

définie par  $P_n(\lambda) = \frac{(\dim V_\lambda)^2}{n!}$  dim de la rep ir.  
 \* int. combi: # tableaux std  
 \* formule des écarts

Rq:  $\sum_{\lambda \text{ irrep de } S_n} (\dim V_\lambda)^2 = n! = |S_n|$  ss-entendu ds déf.  
 est un résultat cl. de th des repr.

Autre caractérisation:  $\forall \pi \in S_n$   
 $E(\lambda \mapsto \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \text{id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Preuve:  $E(\lambda \mapsto \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)}) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{(\dim V_\lambda)^2}{n!} \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)}$   
 $= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda) \cdot \chi^\lambda(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \text{id} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



名古屋大学

Réciproque admise.

$\hookrightarrow$  caractère de la  
 repr rég. (mult. à gauche par  $e_\pi$ )

pas que une  
mesure "algébrique"

Def combi de  $\mathcal{P}_n$ :

mesure image de mesure uniforme sur  $S_n$   
par l'appl.  $S_n \rightarrow Y_n$

$\mapsto$  forme des tableaux  
associés par RSK.

En particulier,

dist de  $\lambda$ , sous  $\mathcal{P}_n \equiv$  dist de la longueur de la plus longue  
ss-suite croissante de perm uniforme

$\nearrow$  malh, on ne va pas décrire cette dist.

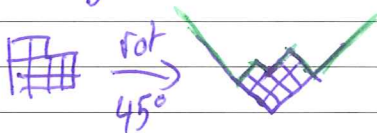
Quel type de résultat cherche-t-on?

• Soit  $(\lambda^{(n)})$  suite de diag.  $|\lambda^{(n)}| = n$  ;  
 $\lambda^{(n)} \sim \mathcal{P}_n$

• rés asympt. sur la suite  $(\lambda^{(n)})_{n \geq 1}$

Que signifie qu'une suite de diag ( $m$  déterministe) cv?

• encodage de  $\lambda$  par fct<sup>o</sup> continue



en vert, graphe d'une fct<sup>o</sup>  
continue  $w_\lambda$ .

Def: on appelle "diagramme continu" fct<sup>o</sup>  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- $w(x) = |x|$  pr  $|x|$  assez gd;
- $w$  continue 1-lipsch.

distance sur  $\mathcal{D}^0$  donnée par  $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$  notion de  
cv.



→ pr espérer une cv, il faut renormaliser

on déf  $\tilde{\lambda}^{(n)} := T_{1/\sqrt{n}}(\lambda^{(n)})$  par

$w_{\tilde{\lambda}^{(n)}}(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} w_{\lambda^{(n)}}(\sqrt{n} \cdot z)$

← intuitivement, on dessine le diag avec cases  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Thm (Vershik/Kerov, Logan/Shepp 1977)

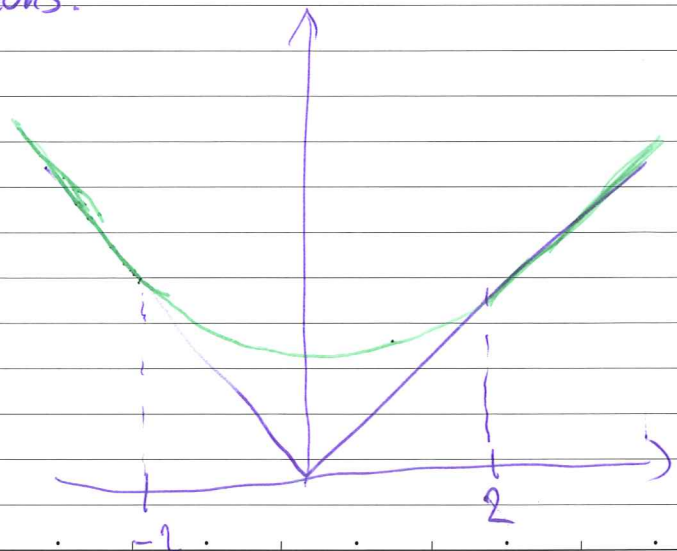
Soit  $\Omega$  le diag continu suivant

$\Omega(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| \geq 2 \\ \frac{2}{\pi} \left( x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2} \right) & \text{si } |x| \leq 2 \end{cases}$

Soit  $(\lambda^{(n)})$  suite de diag aléa  $|\lambda^{(n)}| = n$   
 $\lambda^{(n)} \sim \mathcal{P}_n$

Alors en proba,  $\text{sa} \|\Omega(x) - w_{\tilde{\lambda}^{(n)}}(x)\|_{\infty} \rightarrow 0$ .

→ on va décrire une approche récente de Kerov (publiée par Ivanov et Olshanski), qui permet aussi d'obtenir les fluctuations.



## (B-) Graduation de l'alg Vect( $Ch_\mu$ )

Rappel :

$Ch_\mu$  fct<sup>o</sup> sur  $L^1 Y_n$  déf par  $\stackrel{\text{TS les diag de Young}}{=} \leftarrow \text{not: } n=|\lambda|, k=|$

$$Ch_\mu(x) = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{x^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)} & \text{si } |\mu| \leq |\lambda| \\ 0 & \text{si } |\mu| > |\lambda|. \end{cases}$$

Thm:  $Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}$  ( $k=|\mu|, \pi \in S_k, \text{ type } \mu$ )

On a vu : Vect( $Ch_\mu$ ) est une alg. (i.e. stable par

• Une base alg. est donnée par  $(Re)_{l \geq 2}$

$$R_l := \sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{plan à } l \\ \text{sommets (} l-1 \text{ arêtes)}}} \sum_{\sigma, \tau \in S_k} \varepsilon(\tau) N_{\sigma, \tau} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = (1 \dots k) \\ |\mathcal{C}(\tau)| + |\mathcal{C}(\sigma)| = k+1 \\ \uparrow \text{ val } n}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}$$

Def: Le degré d'une fonction  $F$  sur diag de Young de  $\lambda$  est le degré en  $p$  et  $q$  de

$$F(p, q)$$

ex:  $\deg(N_G) = |V_G|$ ,  $\deg(N_{\sigma, \tau}) = |\mathcal{C}(\tau)| +$   
 $\deg(Re) = l$   $\leftarrow$  fonctions homogènes

Regardons  $Ch_{\pi}$ .

$$Ch_{\pi} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}$$

Question: quelle est la val max de  $|C(\sigma)| + |C(\tau)|$  ss cond  $\tau \cdot \sigma = \pi$ ?

Lemme: Si  $\tau \cdot \sigma = \pi$  ds  $S_k$

$$|C(\sigma)| + |C(\tau)| \leq k + |C(\pi)| \quad (*)$$

de plus, si il y a égalité et que  $\pi = \pi_1 \dots \pi_r$  déc. en cycles disj. de  $\pi$

alors  $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_r)$   
 $\tau = (\tau_1 \dots \tau_r)$

$$G_{\sigma, \tau} = G_{\sigma_1, \tau_1} \dots G_{\sigma_r, \tau_r}$$
  
$$N_{\sigma, \tau} = N_{\sigma_1, \tau_1} \dots N_{\sigma_r, \tau_r}$$

avec

permut les élt de  $\pi_i$  et tel que  $\tau_i \cdot \sigma_i = \pi_i$

$$|C(\sigma_i)| + |C(\tau_i)| = \# \{ \text{élt de } \pi_i \} + 1$$

permut les élt de  $\pi_j$  "minimale"  $\tau_j \cdot \sigma_j = \pi_j$

Idée de preuve: pour  $\sigma \in S_k$

$$R(\sigma) := k - |C(\sigma)| = \# \text{ min de transpositions } t_1, \dots, t_p \text{ nécessaires pr écrire } \sigma = t_1 \dots t_p$$

mult par  $(i, j)$   
si  $i$  et  $j$  st ds un cycle couple le cycle en 2  
si  $i$  et  $j$  st ds cycles diff rassemble les cycles

$$\rightarrow \text{inég triangulaire } R(\sigma) + R(\tau) \geq R(\tau \cdot \sigma) \text{ correspond à } (*)$$

si il y a égalité,  $\exists$  déc minimale  $\pi = t_1 \dots t_p t_{p+1} \dots t_m$

tes les mult par  $t_i$  rassemblent des cycles  
 $\Rightarrow$  cycles de  $\tau, \sigma \subseteq$  cycles de  $\pi$



Corollaire:  $\deg(\chi_{(k)}) = k+1$  terme dominant:  $R_{k+1}$

$$\deg(\chi_{(k)} - R_{k+1}) \leq k-1$$

↑ pourquoi pas  $k$ ?  
car  $|\chi(\sigma)| + |\chi(\tau)|$  a tjrs  
m parité ss hypot =  $\prod$

•  $\deg(\chi_{\mu}) = |\mu| + l(\mu)$  terme dominant:  $\prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}$

$$\deg(\chi_{\mu} - \prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}) \leq |\mu| + l(\mu) - 2$$

Lemme: Si  $x \in \text{Vect}(\chi_{\mu})$ , i.e.  $x = \sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{\mu}$  (qu pgie nulle)

alors  $\deg(x) = \max_{\mu: a_{\mu} \neq 0} (|\mu| + l(\mu))$

Preuve  $\leq$  est claire car  $\deg(\chi_{\mu}) = |\mu| + l(\mu)$

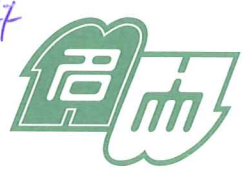
Soit  $d = \max_{\mu: a_{\mu} \neq 0} (|\mu| + l(\mu))$ . Regardons le terme de  $\deg. d$

$$\begin{aligned} \text{hom}_d(x) &= \sum_{\mu: |\mu| + l(\mu) = d} a_{\mu} \text{hom}_d(\chi_{\mu}) \\ &= \sum_{\mu: |\mu| + l(\mu) = d} a_{\mu} \prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1} \neq 0 \end{aligned}$$

comp hom de deg d

car  $\prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}$  st ind.  
et un des  $a_{\mu} \neq 0$

Rq  $\chi_{\mu} = \chi_{(\mu_1)} \cdot \dots \cdot \chi_{(\mu_k)} + \text{termes plus petit deg}$   
peut être prouvé à partir de dev. des produit



c- Un premier résultat de convergence

→ on aime bien regarder des fonctions s/ diag de Young.

Question: Est-ce que pour  $F \in \text{Vect}(Ch_\mu)$ ,  $F(\overline{\lambda^{(n)}})$  cv. ?

Que signifie  $F(\overline{\lambda^{(n)}})$  ?

pas un vrai diagramme

$\lambda^{(n)}$  dessinée avec cases  $\frac{1}{\sqrt{n}}$   $\Rightarrow$  on multiplie p et les q par  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  explique la diag.

si F hom de deg k,  $F(\overline{\lambda^{(n)}}) := \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^k F(\lambda^{(n)})$

par exemple  $R_p(\overline{\lambda^{(n)}}) = \frac{1}{n^{k/2}} R_p(\lambda^{(n)})$  ← on va étudier cette fonction.

Rappel:  $E_{\mathcal{D}_n}(\lambda \mapsto \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim V_\lambda}) = \delta_{\pi, id}$

et  $\ell \geq 3$   $(R_2(\overline{\lambda^{(n)}})) = 1$   $\neq \frac{1}{\sqrt{n}}$

ie.  $E_{\mathcal{D}_n}(Ch_\mu) = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-k+1) & \text{si } \mu = (1^k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Lemme: Soit  $x \in \text{Vect}(Ch_\mu)$ .

$E_{\mathcal{D}_n}(x) = O(n^{\deg(x)/2})$ .

Preuve: Soit  $x = \sum_{\mu} a_{\mu} Ch_{\mu}$

et k le plus gd entier tq  $a_{(1^k)} \neq 0$

$\deg(x) \geq l(1^k) + l(\overline{(1^k)}) = 2k$

$E_{\mathcal{D}_n}(x) = \sum_k a_{(1^k)} n(n-1) \dots (n-k+1) = O(n^k)$  ■



Note:  $R_k(\lambda^{(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} R_k(\lambda^{(\infty)}) \in \mathbb{1}$  NO. méthode des 2<sup>nd</sup> moments ie calcul esp et variance

Soit  $k \geq 3$

donc 
$$E_{\mathcal{P}_n}(R_k(\lambda^{(n)})) = E_{\mathcal{P}_n}(Ch_{(k-1)}(\lambda^{(n)}) + \text{termes de deg} \leq k-1) + O(n^{k-2/2})$$

$\stackrel{=0}{\text{}} \quad \quad \quad O(n^{-1})$

~~Var( $R_k(\lambda^{(n)})$ )~~

$$E_{\mathcal{P}_n}(R_k(\lambda^{(n)})^2) - E_{\mathcal{P}_n}(R_k(\lambda^{(n)}))^2$$

$$= \frac{1}{n^2} E_{\mathcal{P}_n}(Ch_{(k-1)}(\lambda^{(n)}) + \text{termes de deg} \leq 2k-2) - O(n^{-2})$$

$$= O(n^{-1})$$

Proposition:  $R_k(\lambda^{(n)}) \rightarrow 0$  pr  $k \geq 3$   
en probabilité

Preuve: Soit  $\epsilon > 0$ .

$$E_{\mathcal{P}_n}(R_k(\lambda^{(n)})^2) \geq \epsilon^2 \cdot P(|R_k(\lambda^{(n)})| \geq \epsilon)$$

$\rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \rightarrow 0$

Corollaire: Si  $F \in \text{Vect}(Ch_\mu)$ ,  
alors  $F(\lambda^{(n)})$  cv en proba vers une constante.

\* preuve facile!, quand on connaît théorie autour de  $Ch_\mu$

Rq: \* une étude des 4-ème moment permet de prouver la cv p.s.

\* on peut aussi montrer les fluctuations Gaussienne de  $\sum_n F(\lambda^{(n)})$  (et de vecteurs  $\sum_n (F_1(\lambda^{(n)}), \dots, F_2(\lambda^{(n)}))$ ).

ce qui joue combinatoirement: calculer les cov. ...

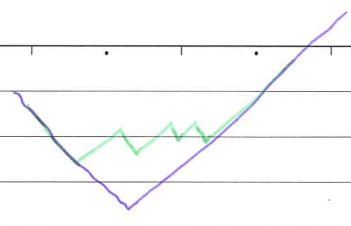
carte (convexe) avec longueur des fibres donnée par  $\mu$   
a au plus  $k+2-\ell(\mu)$  sommets





# D-Convergence géométrique

Rappel: diagramme  $\lambda \xrightarrow[\text{par}]{\text{décrit}} w_\lambda =$



on pose  $y_\lambda = \frac{1}{2} (w_\lambda(x) - |x|)$  à support compact

pour  $k \geq 2$ ,  $t_k(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{k-2} \alpha_\lambda(x) dx$

$t_k$  fonction sur diag de Young  $\hookrightarrow$  (deg  $k$ )

Prop (Dolegala, F., Śniady):

$(t_k)_{k \geq 2}$  est dans Vect  $(Ch_\mu)$

on utilise une autre ordre de R

$$t_k = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l!} (n-1) \dots (n-l+1) \sum_{\substack{k_1, \dots, k_l \geq 1 \\ k_1 + \dots + k_l = n}} R_{k_1, \dots, k_l}$$
$$t_{2k}(\lambda^{(n)}) \xrightarrow{(P)} \frac{1}{k!} \frac{(2k-1)!}{k!} \quad t_{2k+1}(\lambda^{(n)}) \xrightarrow{(P)} 0$$

Lemme:  $t_k(\Omega) = \frac{(2k-1)!}{k! k!}$  et  $t_{2k+1}(\Omega) = 0$

Preuve: calcul d'intégrale...

$$\Rightarrow \text{Pour tout polynôme } P \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) y_{\lambda^{(n)}}(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) y_{\Omega}(x) dx$$

Ah... Si seulement on était sur un compact

Lemme: la proba que  $\sigma$  perm. aléatoire ait une sous-suite croissante de longueur  $3\sqrt{n} \rightarrow 0$



début de la preuve (par RSK)

$$\Rightarrow P(\text{Supp}(y_{\lambda^{(n)}}) \subset [-3, 3]) \rightarrow 1$$

$\uparrow x = y_{\lambda^{(n)}}(x) \neq 0$

on prend P approxime une fonction cloche

$$\Rightarrow \forall x, y_{\lambda^{(n)}}(x) \rightarrow y_{\Omega}(x)$$

$$\Leftrightarrow w_{\lambda^{(n)}}(x) \rightarrow \Omega(x)$$

c et est 1-lipschitzien, on a cv uniforme.

On a "prouve"

$$\|w_{\lambda^{(n)}} - \Omega\|_{\infty} \xrightarrow{(P)} 0.$$

### Fluctuations géométriques

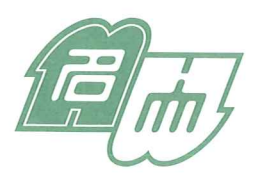
$$(KIO) \quad \frac{\sqrt{n}}{2} (w_{\lambda^{(n)}}(x) - \Omega(x)) \xrightarrow{\text{dist}} \Delta(x)$$

Gaussienne  
indépend  
de var 1

$$\text{où } \Delta(2\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tilde{\gamma}_k}{\sqrt{k}} \sin(k\theta)$$

ms ce n'est que au sens des dist., c'est-à-dire.

que les fonctions de Vect( $Ch_{\mu}$ ) cv...



## II. Conjectures vers une extension de la théorie ?

### A- Extension des caractères irréductibles

Formule de Frobenius  $S_n = \sum_{\mu \vdash n} \frac{\chi_\mu^\lambda}{\dim(V_\mu)} P_\mu / Z_\mu$

fonction de Schur  $\chi_\mu^\lambda$   
 fonction puissance  $P_\mu / Z_\mu$   
 $\prod_i i^{m_i} m_i!$  = facteurs numériques explicites  
 $\chi_\mu^\lambda := \chi^\lambda(\pi)$  ac  $\pi$  de type  $\mu$

not  $\hat{\chi}_\mu^\lambda = \frac{\chi_\mu^\lambda}{\dim(V_\mu)}$

déformation des fonctions de Schur...

polynôme de Jack  $J_\lambda^{(\alpha)}$  ← dép d'un paramètre  $\alpha \geq 0$

$J_\lambda^{(1)} = n! \frac{S_\lambda}{\dim(V^\lambda)}$

def  $\hat{\chi}_\mu^{\lambda,(\alpha)}$  par  $\frac{J_\lambda^{(\alpha)}}{n!} = \sum_{\mu \vdash n} \hat{\chi}_\mu^{\lambda,(\alpha)} P_\mu / Z_\mu$

$Ch_\mu^{(\alpha)} = \alpha^{\frac{-|\mu| - \ell(\mu)}{2}} n(n-1) \dots (n-k+1) \hat{\chi}_\mu^{\lambda,(\alpha)}$  (Lassalle)

### B- Propriétés de Vect( $Ch_\mu^{(\alpha)}$ )

Prop (Lassalle) : Vect ( $Ch_\mu^{(\alpha)}$ ) est une algèbre ;

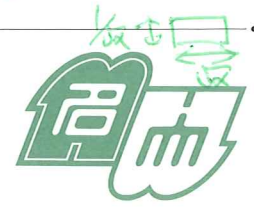
base algébrique  $R_2^{(\alpha)}, R_3^{(\alpha)}, \dots$

$R_k^{(\alpha)} = R_k \left( T_{\sqrt{\alpha}, 1/\sqrt{\alpha}}(\lambda) \right)$

↳ diag étiré = dessiné en cases "anisotropique"

Question ouverte : Peut-on décrire le produit

$Ch_{\mu_1}^{(\alpha)} \cdot Ch_{\mu_2}^{(\alpha)}$



名古屋大学

Conjecture (Lassalle) :  $Ch_{(k)}^{(\alpha)} = K_{(k)}^{(\alpha)} (R_2^{(\alpha)}, R_3^{(\alpha)}, \dots)$

Les coef st des poly à coef entiers  $\geq 0$  en  $\gamma = \frac{k-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$

C- Vens une interprétation combinatoire générale?

Rappel  $\alpha=1$  ( $\gamma=0$ ):

$$Ch_{\mathbb{R}}^{(1)} = \sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{bip unic. enr.} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_0(M)|} N_{G(M)}$$

*graphes connexes dessinés sur surface orientée*

$$\alpha=2; \quad Ch_{\mathbb{R}}^{(2)} = \sum_{\substack{M \text{ carte NON ORIENTÉE} \\ \text{bip unic enr.} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_0(M)|} N_{G(T_{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})(\lambda)}$$

*(F., Śniady)*

*graphes connexes dessinés sur surface orientée*

Conj (générale):

$$Ch_{\mathbb{R}}^{(\alpha)} = \sum_{\substack{M \text{ carte NON ORIENTÉE} \\ \text{bip unic enr.} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_0(M)|} wt(M) N_{G(T_{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}})(\lambda)}$$

*(F. Dolega, Śniady)*

*on a un candidat pr ce poids*

• énoncé sim pr  $Ch_{\mu}$

Prop: conj est vraie pour  $\alpha=2$  (et donc  $\alpha=1/2$ ),  
*(7 sorte de dualité)*

pour  $\lambda = p \times q$  rectangulaire; *grâce à une rel de réc. prop par Lassalle*  
 ~~$\alpha \leq 8$~~  pour  $k \leq 8$  (par ordinateur).  
 pour  $\alpha=1$ , on ne sait pas!!

D- Diagramme aléatoire

$\exists$  ds la littérature  $\alpha$ -mes de Plancherel ac  $E_{D_n^{(\alpha)}}(\lambda \mapsto \chi_{\mu}^{\lambda(\alpha)}) = \delta_{\mu, (1^n)}$

(F., Dolega): sous  $D_n^{(\alpha)}$ ,  $\left\| \left( \frac{wt}{\sqrt{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left( \frac{\chi_{\mu}^{(\alpha)}}{k} \right) \rightarrow \Omega \right) \right\|_{\infty} \xrightarrow{\text{proba}} 0$

en proba



名古屋大学

★ Problème ouvert: fluctuations? C'est une cons. de la conj ci-dessus.