

Séance 3: Un problème combinatoire sur les caractères. Les polynômes de Kerov. NO. ()

rep de $G =$ morphisme de $G \rightarrow GL(V)$

Rappels: irrep de $S_n \iff$ partitions λ de n

pour $\lambda \vdash n$, on s'intéresse à $\chi^\lambda: S_n \rightarrow \mathbb{C}$
 $\pi \mapsto \chi^\lambda(\pi)$

fonction centrale: ne dépend que du type cyclique μ de π .

Thm: Soit $\pi \in S_k$. $\lambda \vdash n$

$$n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}(\lambda)$$

membre de gauche noté $Ch_\mu(\lambda)$ (Rappel: / cste
(où $\mu =$ type (π)) $Ch_\mu(\lambda) = 0$ si $|\lambda| \leq |\mu|$)

→ Résultat vrai $\forall \lambda$ partition de n'importe quelle taille.

On écrit $Ch_\mu = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}$. *ég. entre fct^{os} sur les diag de Young*

Fonctions Ch_μ déjà étudiées par Kerov / Olshanski

I Le sous-espace Vect (Ch_μ) .

↳ I leurs résultats (répartie)
II Réponse combinatoire à un problème de Kerov.

A - Stabilité par multiplication

Prop: Soient μ_1, μ_2 deux partitions.

$Ch_{\mu_1} \cdot Ch_{\mu_2}$ est une comb. lin^{éaire} de (Ch_ν) , ν partitions à coefs entiers ≥ 0 .

mult de fonctions (bravo à trouver)

Tout le A = Preuve par l'exemple: on va regarder $Ch_{(2)} \cdot Ch_{(2)}$.

• Rappel $Ch_{(2)}(2) = n(n-1) \frac{\chi^{(2)}(1,2)}{\dim(V_2)}$

$\chi^{(2)}(1,2) = \text{tr}(e^{(2)}(1,2))$ *mult.*

pas mult. Arg...



Lemme: Si $\chi \in \mathbb{C}[S_n]$,
 χ central ($\forall \sigma \in S_n, \chi\sigma = \sigma\chi$).

alors $e^\chi(x) = \frac{\chi^\lambda(x)}{\dim(V_\lambda)} \cdot \text{Id}_{V_\lambda}$.

Preuve: lemme de Schur. On saute -

Cor: Si $\chi, \psi \in \mathbb{C}[S_n]$, χ central \leftarrow on va utiliser ds cas: ψ central

alors $\frac{\chi^\lambda(\chi\psi)}{\dim(V_\lambda)} = \frac{\chi^\lambda(\chi)}{\dim(V_\lambda)} \cdot \frac{\chi^\lambda(\psi)}{\dim(V_\lambda)}$

Preuve: $e^\chi(\chi\psi) = e^\chi(\chi) \cdot e^\chi(\psi)$
 $= \frac{\chi^\lambda(\chi)}{\dim(V_\lambda)} e^\chi(\psi)$

on prend la $\left. \begin{matrix} \} \\ \text{tr}(-) / \dim(V_\lambda) \end{matrix} \right\}$

$\frac{\chi^\lambda(\chi\psi)}{\dim(V_\lambda)} = \frac{\chi^\lambda(\chi)}{\dim(V_\lambda)} \frac{\chi^\lambda(\psi)}{\dim(V_\lambda)}$ elt central

Astuce: $\chi_{(2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda \left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (i\ j) \right)$

$\chi_{(2,1)}(\lambda) = \frac{1}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda \left(\sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq n \\ i \neq j \\ \neq k}} (i\ j)(k) \right)$ \uparrow $n(n-1)$ termes de sommes. \uparrow 15 m caractère

$\chi_{(3,2)}(\lambda) = \frac{1}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda \left(\sum_{\substack{1 \leq i, j, k, l \leq n \\ i, j, k, l \text{ dist}}} (i\ j)(k\ l) \right)$



Corollaire ci-dessus

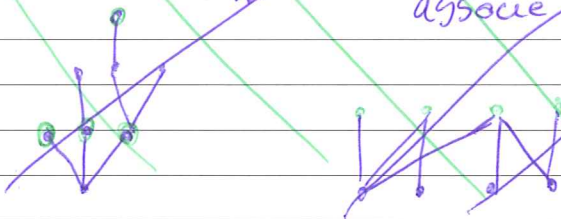
$$\begin{aligned}
 Ch_{(2)}(\lambda) \cdot Ch_{(2)}(\lambda) &= \frac{1}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda \left(\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} (i, j) \cdot \sum_{\substack{1 \leq k, l \leq n \\ k \neq l}} (k, l) \right) \\
 &= \frac{1}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda \left(\sum_{i, j, k, l \text{ dist}} (i, j)(k, l) + 4 \sum_{i, j, l \text{ dist}} (i, l)(j, l) \leftarrow (\text{cas } i=k) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} id \right) \leftarrow (\text{cas } i=k, j=l) \right. \\
 &\quad \left. + 1 \text{ cas similaire} \right)
 \end{aligned}$$

$$= Ch_{(2,2)} + 4 Ch_{(3)} + 2 Ch_{(1,1)}$$

En g^{al} , descr. combinatoire des coeffs
 ms pas de formule close.

B - Une base algébrique de $Vect(Ch_\mu)$.

~~Def: $R_{k,n} = \sum_{\pi \in \Pi_k} \dots$ Si T arbre plan enraciné, on lui associe un graphe bip. $G(T)$.~~



$$E(T) = k - |C(T)|$$

Rappel: $Ch_{(k)} = \sum_{\pi = (1, \dots, k)} (-1)^{k-|\pi|} (-1)^{|\pi|} N_{G(M)}$
 M carte bip. unicellulaire enracinée à k arêtes
 $\leftrightarrow \begin{cases} 0, \tau \in S_k \\ \sigma = (1, \dots, k) \end{cases}$
 $N_{G(M)}$ - graphe sous-jacent
 \downarrow
 $G_{\pi, \tau}$

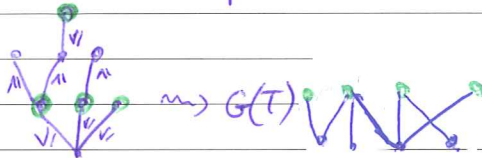
Sous-familles int: $k+1$ sommets \Leftrightarrow arbres \Leftrightarrow planaires



déf: arbres plans enracinés $T = \cdot \sqcup$ liste finie d'arbres $\cdot \cdot \cdot ()$

\bar{c} carte a une arête marquée et syst. de rot. correspond à un arbre plan T . (bicoloration automatique) dessin

Δ $G(T)$ un peu inhabituel.



vu comme graphe biparti

déf: $R_{\mu} = \sum_{T \text{ arbre plan enraciné à } \mu \text{ sommets}} (-1)^{|\mu|} (-1)^{|V_0(T)|} N_{G(T)}$ fonctions sur diag de Young

(Kerov, Biene, Ivanov, Olshanski)

Prop: $(R_{\mu})_{\mu \geq 2}$ est une base alg. de Vect (Ch_{μ})

En particulier, $\exists!$ poly K_{μ} tel que

$$Ch_{\mu} = K_{\mu}(R_2, R_3, \dots)$$

Si $\mu = (k)$, $K(k)$ est appelé "polynôme de Kerov".

pas de preuves (éts de JM ou ~~form de Frobenius~~)

Thm (F., conj par Kerov):

$K(k)$ a des caefs positifs. $k \geq 1$

un peu effective

Fin du cours: idées de la preuve \leftarrow (certaines tr. commun avec P. Śniady M. Dolega)



II - Positivité des polynômes de Kerov.

On va utiliser le point de vue:

- fonctions sur diag de Young;
- Ch_μ, R_μ st des comb. lin. de N_G .

$$R_\mu: N_G \cdot N_{G'} = N_{G \cup G'}$$

A - Quelques exemples.

$$Ch_{(1)} = N_{\circ}, \quad R_2 = N_{\circ} \Rightarrow Ch_{(1)} = R_2$$

$$Ch_{(2)} = -N_{\circ} + N_{\circ} = R_3$$

$$Ch_{(3)} = N_{\circ} - 3 N_{\circ} + N_{\circ} + N_{\circ}$$

écartements possibles

rq: $N_{\text{Carte}} = N_{\text{son graphe sous-jacent}}$

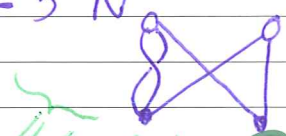
$$= R_4 + R_2$$

$$Ch_{(4)} = \dots \text{ (on saute, in principe que } Ch_{(3)})$$

$$Ch_{(5)} = (120 \text{ termes! dt } \dots - 5 N_{\circ} \dots$$

pas un arbre!
une forêt...

Question: peut-on le réécrire comme c.l. de $N_{\text{forêts}}$



B- Relations entre les R_k : inclusion-exclusion cyclique

Lemme: $N_{G_0} = N_{G_1} + N_{G_2} - N_{G_3} = 0$

Preuve: Rappel

$$N_G(p \times q) = \sum_{\substack{\varphi: V_G \rightarrow \mathbb{N}^* \\ \varphi \uparrow}} \underbrace{\prod_{e \in V_0} p_e(\varphi)}_{M_\varphi} \prod_{e \in V_0} q_e(\varphi) \cdot \delta_{\varphi \uparrow \text{ sur } G}$$

diag. de jantse multi-rect.

ex $N_{G_0} = \sum_{\substack{i,j \leq p \\ i \leq k}} p_i p_j q_k q_l$

Rap: Tous les G_i ont même ens de sommets V_G

$$LHS = \sum_{\varphi: V_G \rightarrow \mathbb{N}^*} M_\varphi \left(\underbrace{\delta_{\varphi \uparrow \text{ sur } G_0}}_{\delta_0} - \underbrace{\delta_{\varphi \uparrow \text{ sur } G_1}}_{\delta_1} - \underbrace{\delta_{\varphi \uparrow \text{ sur } G_2}}_{\delta_2} + \underbrace{\delta_{\varphi \uparrow \text{ sur } G_3}}_{\delta_3} \right) = 0$$

Différents cas:

* Si $\varphi(a) \leq \varphi(d)$, $\delta_0 = \delta_2$ et $\delta_1 = \delta_3$ donc (...) = 0.

* Si $\varphi(b) \leq \varphi(c)$, $\delta_0 = \delta_1$ et $\delta_2 = \delta_3$ donc (...) = 0.

* Si $\varphi(a) > \varphi(c)$ ou $\varphi(b) > \varphi(d)$,

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \text{ donc } (...) = 0$$

~~* Sinon $\varphi(a) > \varphi(d) \geq \varphi(b) > \varphi(c) \geq \varphi(a)$ ✗~~

Retour à $Ch(5)$. ds $Ch(5)$, on remplace N_{\square} par

$$N_{\square} + N_{\text{diag}} - N_{\text{diag}}$$



名古屋大学

→ on peut rassembler les termes pour faire app des R^k , on trouve $Ch(5) = R_6 + 15R_4 + 5R_2^2 + 8R_2$

Observation: • preuve marche pareil si on ajoute des ^{MÊMES} sommets/arêtes à G_0, G_1, G_2, G_3 .

• peut se généraliser... Clé: cycle...

Proposition: Soit G un graphe biparti. On suppose que G contient un cycle C . On choisit arbitrairement une orientation de C .

Soit E_C l'ens des arêtes "montantes" de C .

$$\text{Alors } \sum_{E' \subseteq E_C} (-1)^{|E'|} N_{G|E'} = 0$$

↑ on efface les arêtes de E' au graphe G .

Preuve: similaire à celle de l'ex ci-dessus.

$$\text{not: } \sum_{E' \subseteq E_C} (-1)^{|E'|} N_{G|E'} \in \text{Ker}(G \rightarrow N_G)$$

Corollaire: Soit G un graphe biparti. N_G s'écrit comme une combinaison linéaire de forêts.

Preuve: par réc. sur le nb d'arêtes de G .

* si G est une forêt, rien à montrer.

* sinon G contient un cycle C et

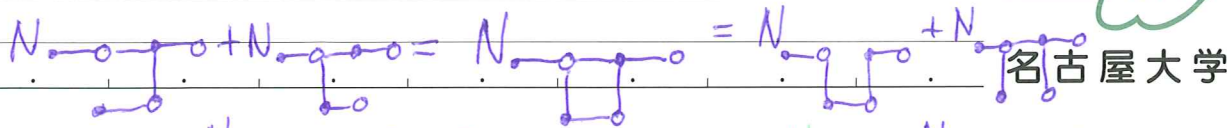
$$N_G = \sum_{\substack{E' \subseteq E_C \\ E' \neq \emptyset}} (-1)^{|E'|+1} N_{G|E'}$$

par (HR) $\forall E' \neq \emptyset$, $N_{G|E'}$ est une c.l de forêts



preuve effective, ms pas d'écriture canonique

choix du cycle, choix de l'orientation



3 RELATIONS ENTRE N_F

→ si M carte ^{bip.} enraignée, on peut déf. déc. canonique de $N_{G(M)}$
 permet d'écrire $Ch(A) = \sum_{\substack{M \text{ carte bip.} \\ \text{uni-ent. à} \\ k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_0(M)|} N_{G(M)}$ de manière
 canonique \bar{c} et de prêt

• on peut rassembler les termes pr faire apparaître $\prod R_i$
 donne une preuve technique de conj. Kerov (on fait autrement)
 ici

C - Un ens complet de relation.

Idées: plutôt que d'ut. incl-excl. cyclique pr casser des cycles,
 on va ajouter des arêtes,

Déf: Soit I une composition de n de longueur paire $2l$.

↑ liste d'entiers > 0 de somme n
 ex: $(4, 2, 3, 1) \neq 10$

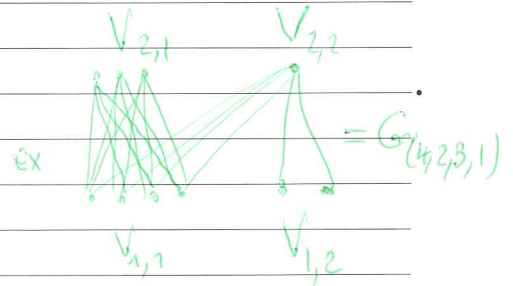
G_I est par déf. le graphe biparti déf. ainsi.

$$* V_1 = V_{1,1} \cup \dots \cup V_{1,l}$$

$$|V_{1,j}| = I_j$$

$$* V_2 = V_{2,1} \cup \dots \cup V_{2,l}$$

$$|V_{2,j}| = I_{l+j}$$



$$* \bar{E} = \prod_{j \leq l} V_{1,j} \times V_{2,l+j}$$



~~Lemme~~

Remarque: G_I a la propriété suivante:

si v et v' sont deux sommets de V_1 ,
alors $\mathcal{V}(v) \subseteq \mathcal{V}(v')$ ou $\mathcal{V}(v') \subseteq \mathcal{V}(v)$

↑
↑
ens des voisins

Lemme: la réciproque est vraie.

i.e. Si G n'appartient pas à la famille $\{G_I; I \text{ comp.}\}$

$\exists v, v' \in V_1$ tq $w, w' \in V_2$ tq

$(v, w) (v', w') \in E_G$

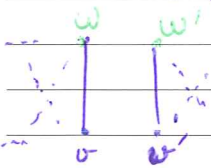
$(v, w') (v', w) \notin E_G$

Prop: Soit G un graphe. N_G s'écrit comme une c.l. de N_{G_I} .

Preuve: Récurrance descendante sur $|E_G|$

• si G est un des G_I (en particulier $G_{(K, E)}$ graphe biparti complet), rien à montrer

• sinon, prenons v, w, v', w' c de le lemme



Posons $G_0 = G \cup \{(v, w), (v', w')\}$.

i.e. in ens de sommet, 2 ar supp.

G_0 contient un cycle (v, w', v', w) .

$$N_{G_0} - N_{G_0 \setminus \{(v, w)\}} - N_{G_0 \setminus \{(v', w')\}} + N_{G_0 \setminus \{(v, w'), (v', w)\}} = 0$$

N_G c.l de $N_{\text{graphes avec } \oplus \text{ d'arêtes}}$. On conclut par (HR). \square



Δ effective ms plusrs choix possibles pour v, w

→ ici, tjrs la même c.l à la fin

En effet

Lemme: $(N_{G_I})_{I \text{ comp de longueur paire}}$ est une famille lin indépendante.

Preuve: Regarder les bons coefs de N_{G_I} ($p \times q$).

Pas diff. ms technique \Rightarrow omise \blacksquare

Corollaire: (i) $(N_{G_I})_{I \text{ comp de longueur paire}}$ base de $\text{Vect}(N_G)$
(du lemme + preuve ci-dessus)

(ii) $\text{Vect}(N_G) \simeq \text{Vect}(G) / \text{Vect}(CIE_{G, \mathbb{Z}})$
 G graph. C cycle de G de longueur l orienté

Preuve: point (i) \checkmark

point (ii): on peut réécrire n'importe quel N_G et donc n'importe quel c.l. de N_G sur base des N_{G_I} en utilisant seulement CIE ac cycles de longueur l \blacksquare



D - Une famille d'inv biparti

Def: graphe "décoré" = couple (G, ϕ) où $\phi: V \rightarrow \{2, 3, \dots\}$

• graphe connexe décoré est expanseur

avec $\sum_{o \in V} \phi(o) = |V|$

😊 def trouvée après (beaucoup) de tâtonnements pas d'intuition

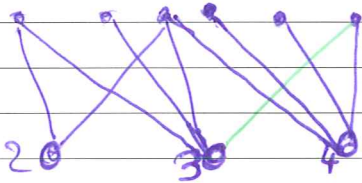
$$\forall V \subseteq V_1, V \neq \emptyset, V_1 \implies |\mathcal{U}(V)| \geq \sum_{o \in V} \phi(o)$$

voisinage fermé de V i.e. $V \cup \{voisins\}$

• type graphe décoré

= partition obtenue en triant multi-ensemble $\mathcal{R}(V_1)$

Ex:



graphe décoré de type $(4, 3, 2)$

non-expanseur $\{2, 3\}$ a un vois trop petit.

expanseur ac arête verte.

Def: ν partition, G biparti

Posons:
$$I_\nu(G) = (-1)^{cc(G)} \# \{ \text{décoration } h \text{ de } G \text{ de type } \nu \text{ t.q. } (G, h) \text{ soit expanseur} \}$$

Prop: G graphe contenant un cycle C

$$I_\nu(C \oplus_{G,C}^e) = 0.$$

$\Rightarrow I_\nu$ bien def sur $\text{Vect}(N_G)$

Preuve: omise, utilise de la géométrie convexe

Lemme: ν, τ partitions (de taille qqqe)

$$I_\nu(R_\tau) = \delta_{\nu, \tau} (-1)^{\ell(\tau)}$$



E - Retour à la conj de Korov

On sait que $Ch_{\mu}(\mathbb{R}) = \sum_{T \text{ partition}} a_{\mu}^T R_{T_1} \dots R_{T_k} \leftarrow \# \text{ parts de } T$

appliquons I_{ν}

$$\sum_{\substack{M \text{ carte} \\ \text{bip uni enr} \\ k \text{ arêtes}}} (-1)^k (-1)^{|V_0(M)|} I_{\nu}(G_M) = a_{\nu}^{\mu} (-1)^{\ell(\nu)} \leftarrow \text{les termes pour } T = \nu \text{ s'annulent}$$

$I_{\nu}(G_M) \neq 0 \Rightarrow \ell(\nu) = |V_0(G)|$

$$a_{\nu}^{\mu} = \underbrace{(-1)^k}_{\text{sgn } \ell(\nu) \text{ positifs}} \cdot \underbrace{(-1)^{|V_0(M)| + |V_1(M)|}}_{k+1 - |V_0(M)| = 2g \text{ pr carte unicellulaire}} \cdot (-1)^{\sum M} \cdot \# \{ \text{d\u00e9c. de } M \text{ de type } \nu \mid M \text{ soit expanseur} \}$$

$G(M) \text{ a } \ell(\nu) \text{ c.c.}$

$$a_{\nu}^{\mu} = \# \{ \text{cartes uni. bip. enr. d\u00e9cor\u00e9es expanseurs de type } \nu \}$$

$\hookrightarrow \text{en \# que cartes d\u00e9cor\u00e9es}$

En particulier, $a_{\nu}^{\mu} \geq 0$



III Conclusion

- Pour l'instant, pas d'appl. du résultat
 → on verra semaine prochaine que passage de $Ch_{\mu} \leftrightarrow R_{\mu}$ est important pr l'étude des gds diagrammes
- on a révélé pas mal de structure des N_G

Rappel: on déf $F_G = \sum_{\substack{\varphi: V_G \rightarrow N \\ \varphi \uparrow}} \prod_{u \in V_G} x_{\varphi(u)} = N_G(p \times q) \mid \begin{matrix} p_i = x_i \\ q_i = x_i \end{matrix}$

ex $F_{\begin{matrix} k & & \\ \swarrow & & \\ i & & j \\ \searrow & & \\ & & l \end{matrix}} = \sum_{\substack{i \leq k, l \\ j \leq p}} x_i x_j x_k x_l$

F_G objet très étudié

Prop: $\text{Vect}(F_G) \simeq \text{Vect}(G) / \text{Vect}(CIE_{G, \mathbb{Z}})$ (longueur 4)

Preuve: comme N_G

oral { pas connu avant, on a utilisé $CIE \in \text{Ker}(G \mapsto F_G)$ ds un travail avec A. Bousicault

Autre résultat: on peut construire explicitement $F_G \mapsto N_G$
 i.e. retrouver 2 ens de variables.

Une conjecture: $\sum_{\substack{\text{arbres} \\ \text{plans enracinés} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} F_G(t)$ est sym. Idem pr $\sum_{\substack{M \text{ bip. uni} \\ \text{sur } \mathbb{Z} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} F_G(M)$

