

Seance 2: Calcul des caractères irréductibles, combinatoire associée.

Rappel: • représentation de G ↔ morphisme G → GL(V)
• caractère ↔ χ: G → C "trace"
Cev. de dim finie

repr. irréductibles du groupe sym. st construites ainsi:

T rempl. de λ. a\_λ = Σ\_{σ ∈ RS(T)} σ ; b\_λ = Σ\_{σ ∈ CS(T)} ε(σ) σ

→ ∃ κ\_λ : p\_λ := κ\_λ a\_λ b\_λ projecteur (p\_λ^2 = p\_λ)

Alors V\_λ = C[S\_n] · p\_λ irrep de S\_n associée à λ.

act°: mult à gauche e(σ)(κ p\_λ) = e\_σ · κ · p\_λ

κ\_λ = dim(V\_λ) / n!

Aujourd'hui: • on va calculer les caractères "normalisés" à partir de cette descr., c'ad traces de l'action ci-dessus

form. conjecturée par R. Stanley prouvée ds ma thèse preuve ici obtenue en collaboration av P. Śniady

• on va regarder les objets combinatoires qui apparaissent. commenter

{ semaine prochaine: application aux "poly de Kerov"

I Calcul des caractères irréductibles

A- Une première formule: On veut calculer tr(e^π(π): C[S\_n] · p\_λ → C[S\_n] · p\_λ) κ · p\_λ ↦ π · κ · p\_λ

Difficulté: C[S\_n] · p\_λ n'a pas de base explicite

→ embêtant pour calculer une trace...

Déf : Considérons  $\varphi_{\lambda, \pi} : \mathbb{C}[S_n] \rightarrow \mathbb{C}[S_n]$   
 $x \mapsto e^{\pi} \cdot x \cdot p_{\lambda}$

Lemme :  $\text{tr}_{\mathbb{C}[S_n]}(\varphi_{\lambda, \pi}) = \text{tr}_{V_{\lambda}}(e(\pi))$

Preuve :  $p_{\lambda}^2 = p_{\lambda} \Rightarrow$  la mult. à droite  $x p_{\lambda}$  par  $p_{\lambda}$  est un projecteur.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[S_n] &= \text{Im}(x p_{\lambda}) \oplus \text{Im}(\text{Id}_{\mathbb{C}[S_n]} - x p_{\lambda}) \\ &= \mathbb{C}[S_n] \cdot p_{\lambda} \oplus \mathbb{C}[S_n](1 - p_{\lambda}) \end{aligned}$$

$$\varphi_{\lambda, \pi} / \mathbb{C}[S_n] \cdot p_{\lambda} = e(\pi) \quad (\text{car } p_{\lambda}^2 = p_{\lambda})$$

$$\varphi_{\lambda, \pi} / \mathbb{C}[S_n](1 - p_{\lambda}) = 0 \quad (\text{car } (1 - p_{\lambda}) p_{\lambda} = 0)$$

$$\text{Mat}(\varphi_{\lambda, \pi}) \simeq \begin{pmatrix} \text{Mat}(e(\pi)) & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbb{C}[S_n] p_{\lambda} \\ \mathbb{C}[S_n](1 - p_{\lambda}) \end{matrix}$$

$\mathbb{C}[S_n] \cdot p_{\lambda} \quad \mathbb{C}[S_n](1 - p_{\lambda})$

Calcul de  $\chi^{\lambda}(\pi)$  :

$$\begin{aligned} \chi^{\lambda}(\pi) &= \text{tr}(\varphi_{\lambda, \pi}) \quad ; \quad \rightarrow n \text{ linéaire, tr linéaire} \\ &= \frac{\dim(V_{\lambda})}{n!} \sum_{\sigma \in \text{ERS}(\pi)} \sum_{\tau \in \text{CS}(\tau)} \varepsilon(\tau) \text{tr}(x \mapsto e^{\pi} \cdot x \cdot e_{\sigma} \cdot e_{\tau}) ; \end{aligned}$$

permuté la base  $(e_g)$  de  $\mathbb{C}[S_n]$   
 i.e. mat est une mat de permutations  
 pr.  $e_g \mapsto e_{\pi g \sigma \tau}$

$$= \frac{\dim(V_{\lambda})}{n!} \sum_{\sigma \in \text{ERS}(\pi)} \sum_{\tau \in \text{CS}(\tau)} \varepsilon(\tau) \sum_{g \in S_n} \mathbb{1}_{g = \pi \cdot g \cdot \sigma \cdot \tau} \quad \text{tr} = \# \text{pts fixes}$$

On va jouer ac sommes pr réécrite tout ça  $\rightarrow$  intérêt: formules qui ne dépend pas de  $T$ .

$$\text{condition } g = \pi \cdot g \cdot \sigma \cdot \tau \Leftrightarrow \pi = \underbrace{g \tau^{-1}}_{\tau'} \cdot \underbrace{g^{-1} g \sigma^{-1} g^{-1}}_{\sigma'} \quad \sigma^{-1} = (i_1 \dots i_r) (j_1 \dots j_r)$$

$$\text{Obs: } \sigma \in CS(T) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in CS(T) \Leftrightarrow \sigma' \in CS(g(T)) \quad (g(i_1) \dots g(i_r)) \\ \tau \in RS(T) \Leftrightarrow \tau^{-1} \in RS(T) \Leftrightarrow \tau' \in RS(g(T)) \quad (g(j_1) \dots g(j_r))$$

$$\frac{n!}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda(\pi) = \sum_{g \in S_n} \sum_{\sigma' \in RS(g(T))} \sum_{\tau' \in RS(g(T))} \varepsilon(\tau') \delta_{\pi = \tau' \sigma'}$$

$g$  n'apparaît que via  $g(T)$  posons  $\tau' = g(\tau)$

$$= \sum_{T \text{ remplissage}} \sum_{\sigma \in RS(T)} \sum_{\tau \in RS(T)} \varepsilon(\tau) \delta_{\pi = \tau \sigma}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \tau \sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) \cdot \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda)$$

$\swarrow$  éch de sommes

$$\text{où } \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda) = \# \left\{ \tau : \begin{array}{l} \sigma \in RS(T) \\ \tau \in CS(T) \end{array} \right\}$$

On a montré

Proposition:  $\frac{n!}{\dim(V_\lambda)} \chi^\lambda(\pi) = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \tau \sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda)$

Pb:  $n!$  termes dans la somme

$\Rightarrow$  pas d'ex. non trivial qui rentre ds le tableau  $\odot$

B - Réduire l'ens de sommation

$\{i: \pi(i) \neq i\}$

On va voir que, si  $\pi$  a un petit support, alors la somme devient plus petite.

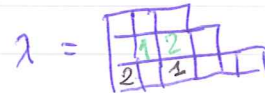
Supposons  $\pi \in S_k \subseteq S_n$  ( $k \leq n$ ) autrement dit  $\pi(j) \geq j$  pr  $j > k$ .  
On étend la déf de  $\tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda)$ .

Déf: Soit  $\sigma, \tau \in S_k$ ,  $\lambda \vdash n$

$\tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda) := \# \{ f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda \text{ tels que}$

- $\forall i, f(i)$  et  $f(\sigma(i))$  st ds  $m$  lignes
- $\forall i, f(i)$  et  $f(\tau(i))$  st ds  $m$  colonne

Ex:  $\tilde{N}_{(12), id}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i (\lambda_i - 1)$



(choix ordonné de 2 cases  $\neq$  ds  $m$  ligne)

$\Rightarrow k, n \geq 1$ .  $\lambda \vdash n$ ,  $\pi \in S_k$ .

Prop:  $\Rightarrow \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{\substack{\text{coef} \\ \text{n'est plus} \\ \text{le même}}}$   $\frac{x^\lambda(\pi)}{\dim(\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda)$   
*pas  $S_n$  !!*

Preuve: si  $k > n$ ,  $x^\lambda(\pi)$  pas déf ms coef vaut 0  
 $\Rightarrow$  LHS vaut 0.  
par conv.,

$f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda$  ne peut être inj  $\Rightarrow$  RHS vaut 0.

Cas  $k \leq n$ : on part de

$$n! \frac{\chi^\lambda(\bar{\pi})}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \tau \circ \sigma = \bar{\pi}}} E(\tau) \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda) \quad \bar{\pi}: \text{prolongement de } \pi \text{ ds } S_n$$

on va couper somme en 2 selon que

$$\bullet \text{ Supp}(\sigma) \cap \text{Supp}(\tau) \subseteq \{1, \dots, k\} \Rightarrow \text{Supp}(\tau) \subseteq \{1, \dots, k\} \quad (\tau = \bar{\pi} \circ \sigma')$$

Soit  $f$  inj.  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \lambda$  vér. (\*):  ~~$f$~~

$\check{f} = f|_{\{1, \dots, k\}}$  est inj et vér. (\*)

$\bullet$   $g$  est une bij.  $\lambda \setminus \text{Im}(\check{f}) \rightarrow \{k+1, \dots, n\}$  dans  $\lambda$

Réciproquement, si on prend  $\check{f}$  et  $g$  comme ça, on construit  $f$  inj.  $\{1, \dots, n\} \rightarrow \lambda$  vér. (\*)

$$\Rightarrow \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda) = (n-k)! \tilde{N}_{\sigma|_{\{1, \dots, k\}}, \tau|_{\{1, \dots, k\}}}(\lambda)$$

$\bullet$   $\text{Supp}(\sigma) \not\subseteq \{1, \dots, k\}$  i.e.  $\exists i > k \in \sigma(i) = j \neq i$

$$\text{alors } \tau(j) = \tau \circ \sigma(i) = \bar{\pi}(i) = i.$$

Soit  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \lambda$  dans  $\lambda$  vér. (\*).

$f(i)$  et  $f(j)$  sont dans la  $m$  ligne et  $m$  colonne de  $\lambda$ .

$\Rightarrow f$  non inj.

$$\text{Donc } \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda) = 0$$

$$(2.6) \quad \text{Finalement, } \frac{n! \chi^2(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \tau\sigma = \pi \\ \text{Supp}(\sigma), \text{Supp}(\tau) \subseteq \{1, \dots, k\}}} \varepsilon(\tau) (n-k)! \tilde{N}_{\sigma/\{1, \dots, k\}, \tau/\{1, \dots, k\}}(\lambda).$$

En posant  $\tilde{\sigma} = \sigma/\{1, \dots, k\}$ ,  $\tilde{\tau} = \tau/\{1, \dots, k\}$ .

$$\frac{n! \chi^2(\pi)}{(n-k)! \dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau} \in S_k \\ \tilde{\tau}\tilde{\sigma} = \pi}} \varepsilon(\tilde{\tau}) \tilde{N}_{\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}}(\lambda). \quad \square$$

Exemple :  $\pi = (1\ 2) \in S_2$

2 factorisations

$\sigma = (1, 2)$  et  $\tau = \text{id}$

$$\tilde{N}_{(1,2), \text{id}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i (\lambda_i - 1)$$

$\ell \leftarrow \# \text{ de lignes}$

$\sigma = \text{id}$  et  $\tau = (1, 2)$

$$\tilde{N}_{\text{id}, (1,2)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell'} \lambda_i' (\lambda_i' - 1)$$

$\ell' \leftarrow \# \text{ de colonnes}$   
 $\uparrow$   
taille de la  $i$ -ème colonne

$$\begin{aligned} \text{Donc } n(n-1) \frac{\chi^2((1,2))}{\dim(\lambda)} &= \sum \lambda_i (\lambda_i - 1) - \sum \lambda_i' (\lambda_i' - 1) \\ &= \sum \lambda_i^2 - |\lambda| - \sum \lambda_i'^2 + |\lambda| \end{aligned}$$

Résultat déjà connu mais pas trivial...

C - Oublier l'injectivité

Def: Soit  $\sigma, \tau \in S_k, \lambda \vdash n$

$$N_{\sigma, \tau}(\lambda) := \# \{ f : \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda \text{ qui vér } (*) \}$$

Ex  $N_{(1,2), id_2}(\lambda) = \sum_{i=1}^l \lambda_i^2$

Ex:  $n(n-1) \frac{\chi^\lambda((1,2))}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{i=1}^l \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^l \lambda_i^2$   
*diff avec le résultat précédent*  
*déjà vu!*  
 ← "formule de Stanley"

Thm:  $n \dots (n-k+1) \cdot \frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}(\lambda)$

Preuve: on veut montrer que

$$\sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) N_{\sigma, \tau}(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) \tilde{N}_{\sigma, \tau}(\lambda)$$

$$\sum_{f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda} \left( \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) \delta_{f, \sigma, \tau} \right) = \sum_{f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda} \left( \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_k \\ \tau \cdot \sigma = \pi}} \epsilon(\tau) \tilde{\delta}_{f, \sigma, \tau} \right)$$

*pour  $\tau$  vér. (\*) dépend de  $\sigma, \tau$  et  $f$*   
 *$\tilde{\delta}_{f, \sigma, \tau}$  vér. (\*)*

On va montrer  $\forall f$  non inj,  $(\dots) = 0$ .

Soit  $f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda$  et  $i \neq j$  tels que  $f(i) = f(j)$ .

$\sigma, \tau$  vérifient (\*)  $\Leftrightarrow (ij) \cdot \sigma, \tau(i, j)$  vérifient (\*)

involution ss pts fixes: chgt le signe  $\epsilon(\tau)$   
 sur les couples  $\sigma, \tau$  vér. (\*) ac  $\tau \cdot \sigma = \pi$ .

$\Rightarrow (\dots) = 0 \quad \forall f$  non inj. ■

Rq: caractère vu  $\tau$  fct° sur  $\lambda$ .  $\Rightarrow$  "dual"

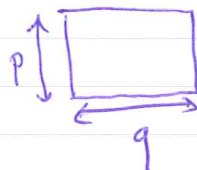
(28)

## II - Combinatoire de la form de Stanley

### A - Fonctions $N_{\sigma, \tau}$

Rappel:  $N_{\sigma, \tau}(\lambda) = \# \{ f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \lambda \text{ vérifiant } (*)_f \}$

$(*)_f$   $\forall i, f(i) \text{ et } f(\sigma(i))$  st ds m ligne  
 $\forall i, f(i) \text{ et } f(\tau(i))$  st ds m colonne

a- Cas  $\lambda = p \times q$  rectangulaire   
 $= (\underbrace{q, \dots, q}_p \text{ fois})$

Lemme:  $N_{\sigma, \tau}(p \times q) = p^{|\mathcal{C}(\sigma)|} \cdot q^{|\mathcal{C}(\tau)|}$

Preuve: Soit  $f$  vérifiant  $(*)_f$ . On peut définir  $h_n$  et  $h_c$ .

$h_n: \mathcal{C}(\sigma) \rightarrow \mathcal{R}(\lambda)$   
 $c \mapsto \text{ligne}(f(i))$  où  $i \in c$   
 ↑ ens ligne de  $\lambda$   
 ↑ par  $(*)_f$ , ne dépend pas du choix de  $i$ .

$h_c: \mathcal{C}(\tau) \rightarrow \text{Col}(\lambda)$   
 $c \mapsto \text{colonne}(f(i))$  où  $i \in c$   
 ↑ ens col de  $\lambda$   
 ↑ bien déf. par  $(*)_f$ .

Réciproquement, si on a  $(h_n, h_c)$ , on pose

$f(i) = (\underbrace{h_n(c_1)}_{\text{ligne}}, \underbrace{h_c(c_2)}_{\text{colonne}})$  où  $c_1$  est le cycle de  $\sigma$  contenant  $i$   
 $c_2 \text{ --- } \tau \text{ --- } i$

$$\# \{ f: (*)_f \} = \# \{ (h_n, h_c) \} = \# \{ h_n \} \cdot \# \{ h_c \} = p^{|\mathcal{C}(\sigma)|} \cdot q^{|\mathcal{C}(\tau)|}$$

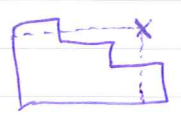


Corollaire:  $n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{\chi^{p \times q}(\pi)}{\dim(V^{p \times q})} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in S_n \\ \tau \in \Pi}} \#E(\tau) p^{|\sigma|} q^{|\tau|}$   
 (Stanley, 2003)  
 outils: jet<sup>tes</sup> de Schur

b - Cas 2 général

Partant de  $f$ , on peut tjrs déf.  $h_r$  et  $h_c$ !

Par contre partant de  $h_r$  et  $h_c$ , et en posant  $f(i) = (h_r(c_1), h_r(c_2))$  on peut avoir  $f(i) \notin \lambda$



Def: Un couple  $(h_r, h_c)$  vér  $(*)_R$  si

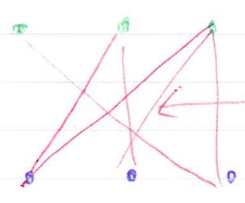
$\forall i, (h_r(c_1), h_r(c_2)) \in \lambda$   $\left. \begin{array}{l} c_1 \text{ cycle de } \sigma \text{ cont } i \\ c_2 \text{ } \tau \text{ } \end{array} \right\}$   
 $\iff \forall c_1 \in C(\sigma), c_2 \in C(\tau), \text{ tq } c_1 \cap c_2 \neq \emptyset, (h_r(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda$   $\left. \right\} \text{def } (*)_R$

Lemme:  $N_{\sigma, \tau}(\lambda) = \# \{ (h_r, h_c) \text{ vérifiant } (*)_R \}$

$N_{\sigma, \tau}(\lambda)$  ne dépend que ~~des~~ cycles de  $\sigma$  et  $\tau$  et de leurs intersections. (vide ou non vide)

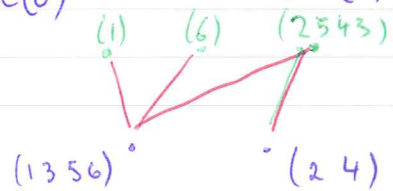
codage ds un graphe biparti

$G_{\sigma, \tau} =$



$C(\tau)$   
 arête  $(c_1, c_2)$  si  $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$   
 $C(\sigma)$

exemple:  
 $\sigma = (1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$   
 $\tau = (1)(2\ 5\ 4\ 3)(6)$



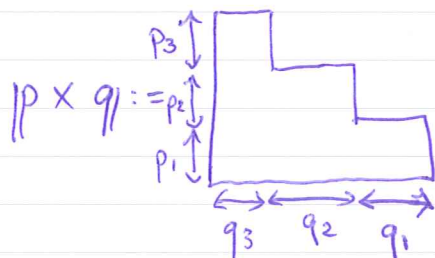
Not:  $N_G$

### c. Coordonnées multirectangulaires

• choses st simples sur diag rectangulaire

Idée (Stanley): regarder tout diag comme superposition de rectangles

Def: • Soit  $p = (p_1, \dots, p_m)$  et  $q = (q_1, \dots, q_m)$  deux listes d'entiers  $\geq 0$  de même longueur



Proposition : 
$$N_G(p \times q) = \sum_{\substack{\varphi: V_G \rightarrow \mathbb{N}^* \\ \varphi \text{ croissante}}} \prod_{b \in V_b} p_{\varphi(b)} \prod_{j \in V_j} q_{\varphi(j)}$$

$\uparrow (c_1, c_2) \in E_G \Rightarrow \varphi(c_1) \leq \varphi(c_2)$

cvt:  $p_i, q_i = 0$   
 pr  $i > m$ .

Ex : • 
$$N_G^{h, \ell}(p \times q) = \sum_{\substack{i, j \leq h \\ j \leq \ell}} p_i p_j q_h q_\ell$$

Preuve: 
$$N_G(p \times q) = \# \{ (h_a, h_c) \text{ vér } (*) \}$$

$h_a: V_b \rightarrow R(p \times q)$

$h_c: V_j \rightarrow Col(p \times q)$

$\{i, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+p_2}, \dots\}$

Def  $\varphi: V_G \rightarrow \mathbb{N}^*$

$\varphi(v_b) = i$  si  $h_a(v_b) \in \{p_1 + \dots + p_{i-1} + 1, \dots, p_1 + \dots + p_i\}$

$\varphi(v_j) = i$  si  $h_c(v_j) \in \{q_1 + \dots + q_{i-1} + 1, \dots, q_1 + \dots + q_i\}$

Fait 3:  $\ast (h_n, h_c)$  vér  $(\ast)_\ell \Leftrightarrow \varphi$  croissante

$$\ast \# \text{ préimage de } \varphi = \prod_0^b P_{\varphi(b)} \prod_i q_{\varphi(i)}$$

Rq: def  $F_G(x_1, x_2, x_3, \dots) := \sum_{\substack{\varphi: V_G \rightarrow \mathbb{N}^* \\ \varphi \text{ croissante}}} \prod_{v \in V_G} x_{\varphi(v)}$  pr  $G$  graphe orienté.

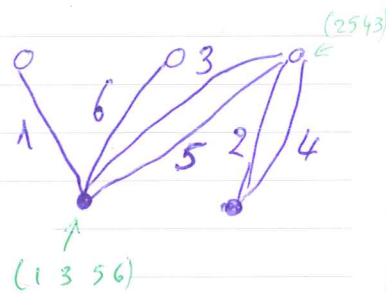
$F_G$  classique en combi alg. "série gén. de P-partitions"  
 $\rightarrow$  naissance de la th des fct<sup>os</sup> quasi-sym.

Note:  $F_G(x_1, x_2, x_3, \dots) = N_G(p \times q) \Big|_{\substack{p_i = x_i \\ q_i = x_i}}$  pr  $G$  biparti.

### B- Contes

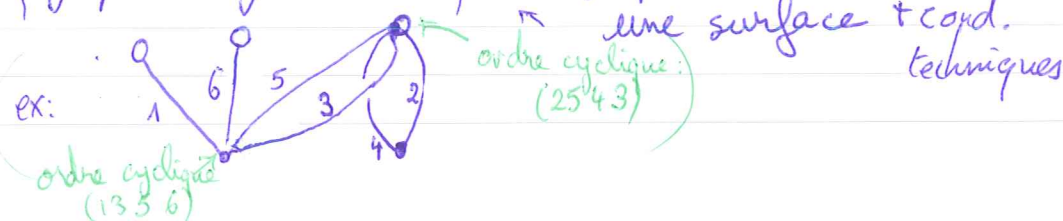
On regarde ici des multi-graphes biparti  
 ac arêtes étiquetées

$$V = V_0 \cup V_1 \quad E = \{1, \dots, k\}$$



Def: Un syst de rotation d'un graphe  $G$  est la donnée, pour tout sommet du graphe, d'un ordre cyclique autour des arêtes.  
 ex:  $\circ$  en vert ci-dessus  $\rightarrow$  représentation planaire

Rq: naturel qd graphe est dessiné sur une surface (par ex. le plan)  
 en fait {graphe + syst rotation}  $\simeq$  graphe dessiné sur une surface + coord. techniques



Def: Un graphe connexe + syst de rotation = carte

Il y a une bij

$S_k \times S_k \cong$  graphes bipartis + syst de rotation  
 arêtes étiqu de 1 à k.

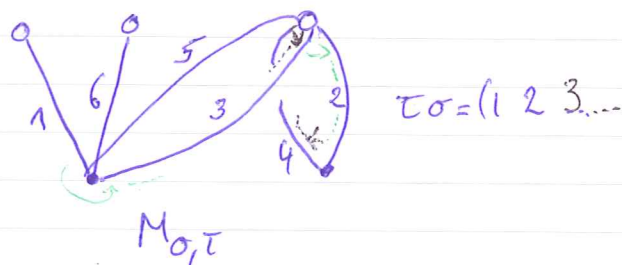
$$(\sigma, \tau) \mapsto M_{\sigma, \tau}$$

ex:  $\sigma = (1356)(24)$   $\leftarrow$  carte ci-dessus  
 $\tau = (1)(2543)(6)$

réciroquement, un sommet en bas / cycle de  $\sigma$ ;  
 un haut / cycle de  $\tau$ .  
 arête  $i$  entre  $c_i$  et  $c'_i$ .

$\Rightarrow$  graphe ss-jacent à  $M_{\sigma, \tau}$  est  $G_{\sigma, \tau}$ !  
 on oublie arêtes multiples.  
 ordre cyclique.

lecture du produit sur  $M_{\sigma, \tau}$



$\rightarrow$  quand on retombe au point de départ, on a fait le tour d'une "face".

$\rightarrow$  chaque face correspond à un cycle du produit

Fixons  $\pi = (1 \dots k) = c_k$  *déjà "unicellulaire"*

$\tau\sigma = c_k \Rightarrow M_{\sigma, \tau}$  a 1 face (en part convexe)

$\Rightarrow$  on peut réétiqueter ttes ses arêtes si on sait laquelle est la n°1.

$$\{ \tau, \sigma \in S_k; \tau\sigma = c_k \} \approx \{ \text{cartes biparties unicellulaires enraînées à } k \text{ arêtes} \}$$

objet très étudié en combinatoire

par ex: Thm (Jackson, 1985):

$$\sum_{\substack{M \text{ carte bip.} \\ \text{unicellulaire enraînée} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} |V_0(M)|^x |V_1(M)|^y = \sum_{r, s \geq 1} \binom{k-1}{r-1, s-1, k+1-r-s} \binom{x}{r} \binom{y}{s}$$

Corollaire:  $n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{\chi^{p \times q}(c_k)}{\dim(V^{p \times q})} = (-1)^k k! \sum_{r, s \geq 1} \binom{k-1}{r-1, s-1, k+1-r-s} \binom{p}{r} \binom{-q}{s}$

Preuve: Thm (Stanley) + Thm (Jackson) + éq. fact de  $c_k$  cartes  $\square$

Rq: Thm (Jackson) est démontré à base de caractères (formule # fact de  $\pi = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{\chi^\lambda(\pi) \chi^\lambda(x) \chi^\lambda(y)}{\dim \lambda}$ )

ms lien au formab combi. et mystérieux. présentée ici  $\#$