Cours Peccot

Approche duale des représentations du groupe symétrique.

Séance 1 : Représentation des groupes finis, caractères.
Construction des représentations irr. par le sym de Young.

I Quelques notions de th. des repr. des gpes finis.

A - Définitions

Déf : Soit G un gpe fini. Une repr. de G est un couple (ρ, V) où

- V est un $\mathbb{C}$-e.v. de dim $< \infty$
- $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ morph de gpes.

Exemple : $G = S_n$, $V = \mathbb{C}^n$ (i.e. $GL(V) \simeq \{$matrices inv. $n \times n\}$)

ρ : permutation $\longmapsto$ matrice de permutation correspondante

i.e. $\rho(\sigma) \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$ "repr géométrique"

Déf : le caractère associé à (ρ, V) (ou V pr faire court) est $\chi^\rho : G \to \mathbb{C}$ défini par

$$\chi^V(g) = \operatorname{tr} \rho(g).$$

ex : $\chi^{geom}(\sigma) = \#$ pts fixes

$\chi^{reg}(g) = |G| \delta_{g}$

G qque, $V = \mathbb{C}[G]$ (base $(e_g)_{g \in G}$) "repr régulière"

$\rho(g') \cdot e_g = e_{g'g}$

B – Classification et représentations irréductibles

Question : on se donne un groupe G. On veut décrire ses repr. (à isomorphisme près)

→ il y en a ∞té. Mais on peut les décrire à l'aide de briques de base et d'une construction.

Briques de base : représentations dite "irréductibles"

déf : Une représentation V est irréductible si elle ne contient pas de ss-esp. stable non trivial. $(\neq \{0\}, V)$

$\overset{\text{Thm de Mashke}}{\Leftrightarrow}$ ne s'écrit pas $V_1 \oplus V_2$ $(V_1, V_2 \neq \{0\}, V)$.

Construction : somme directe de représentation

déf-prop : (ρ_1, V_1), (ρ_2, V_2) deux repr de G.

Alors $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ est une repr. de G

$$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) \cdot (v_1 \oplus v_2) \overset{\text{déf.}}{=} \rho_1(g) \cdot v_1 \oplus \rho_2(g) \cdot v_2$$

Thm : • Il existe un nombre fini de repr irréductibles de G (à iso près)

$(\rho_1, V_1) \dots (\rho_N, V_N)$ $\quad N = \#$ cl. conj. du groupe

• Pour toute représentation V de G, il existe une unique liste d'entiers $(m_1, \dots, m_N)$ tq $V \underset{\text{en tt que repr.}}{\simeq} V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_N^{m_N}$.

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

C- Outils principal pour ça : caractères ② $\langle f, f' \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{f'(g)}$

③ → Thm : $(\chi^{V_i})_{1 \leq i \leq N}$ forment une base orthonormale de l'esp. des fonctions centrales de G dans $\mathbb{C}$.

①
- tq $f(h^{-1} g h) = f(g) \quad \forall g, h \in G$
- ou (eq) f cstte sur classes de conj.
- ex : caractères

⇝ implique le thm précédent

Version plus "constructive" : $m_i = \langle \chi^V, \chi^{V_i} \rangle$

⇒ pour un gpe G donné, on aimerait :
- décrire les repr. irréductibles ;
- calculer leur caractères.

~~ma~~

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

II Construction des repr. irréductibles du gpe symétrique par le project. de Young.

Ici $G = S_n$ $(n \geq 1)$.

$\#$ repr. irred $= \#$ cl. conj. de S_n
$= \#$ partitions de l'entiers n
↑ liste ↓ d'entiers >0 de somme n.

En fait, il y a une bij. naturelle. $\leftrightarrow$ diag de Young
ex $(4,4,2) \vdash 10$, 

i.e. pour toute partition λ, on va construire une repr irréductible V_λ.

Lemme A : (pour G g^{al}) • Toute représentation irréductible apparaît comme une sous-rep. de $\mathbb{C}[G]$

• Toute sous-rep V de $\mathbb{C}[G]$ ~~peut~~ est de la forme

$$V = \mathbb{C}[G] \cdot p = \{x \cdot p, \ x \in \mathbb{C}[G]\}$$

ce n'est pas unique

i.e. $V = \mathrm{Vect}(e_g \cdot p)_{g \in G}$ ⚠ ce n'est pas lin ind.

$$\rho(h) \cdot e_g \cdot p = e_{hg} \cdot p$$

• On peut choisir p projecteur $p^2 = p$. Preuve : omise.

~~Programme~~ Plan : A- définir des éléments c_λ pour λ part. de n

B- Prouver que $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_\lambda$ irréd

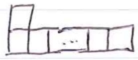
C- Prouver que $V_\lambda \not\cong V_\mu$

A- Déf.

i.e remplissage ac les nb de 1 à n SANS condiT de croissance.

Choisir T un tableau de forme λ.

ex : $\lambda = (n-1, 1)$ $\qquad T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 \\ \hline 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ \hline \end{array}$

$=$ 

Posons

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in RS(T)} \sigma \in \mathbb{C}[S_n] \qquad \text{ex} : a_\lambda = \sum_{\substack{\sigma(1)=1 \\ \sigma \in S_n}} \sigma$$

permutations qui prés les lignes / colonnes

$$b_\lambda = \sum_{\sigma \in CS(T)} \varepsilon(\sigma)\sigma \in \mathbb{C}[S_n] \qquad \text{ex} : b_\lambda = id_n - (1,2)$$

⚠ en fait a_λ et b_λ dépendent de T ! Mauvaise notation...

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda \overset{\text{ex}}{=} \underbrace{\sum_{\substack{\sigma(1)=1 \\ \sigma \in S_n}} \sigma}_{X_1} - \underbrace{\sum_{\substack{\sigma(2)=1 \\ \sigma \in S_n}} \sigma}_{X_2}$$

(Rq : $[id]\, c_\lambda = 1 \Rightarrow c_\lambda \neq 0$)

Observation :

- si $\sigma \in RS(T)$ $\quad \sigma \cdot a_\lambda = a_\lambda \cdot \sigma = a_\lambda$
- si $\tau \in CS(T)$ $\quad b_\lambda \cdot \tau = \tau \cdot b_\lambda = \varepsilon(\tau) \cdot b_\lambda$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma \cdot c_\lambda = \sigma a_\lambda b_\lambda = a_\lambda b_\lambda = c_\lambda \Rightarrow (1) \quad \sigma \cdot c_\lambda = c_\lambda \\ c_\lambda \cdot \tau = a_\lambda b_\lambda \tau = \varepsilon(\tau)\, a_\lambda b_\lambda = c_\lambda \Rightarrow (2)\ c_\lambda \tau = \varepsilon(\tau) c_\lambda \end{cases}$$

Lemme B : (1) et (2) dét. c_λ à une cstte près

Preuve. Soit $x = \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi \, e_\pi$

tq (1) $\sigma \cdot x = x$ pr $\sigma \in RS(T)$
(2) $x \cdot \tau = \varepsilon(\tau) \cdot x$ pr $\tau \in CS(T)$

$\xrightarrow[\text{sur coef}]{\text{traduction}}$

$\alpha_{\pi} = \alpha_{\sigma \cdot \pi}$ pr $\sigma \in RS(T)$, $\pi \in S_n$ (1')
$\alpha_\pi = \varepsilon(\tau)\, \alpha_{\pi\tau}$ pr $\tau \in CS(T)$, $\pi \in S_n$ (2')

En particulier $\alpha_{\sigma \cdot \tau} = \varepsilon(\tau)\, \alpha_{id} = \varepsilon(\tau)\, \alpha_{id}$

Question : quelles permutations π s'écrivent $\sigma \cdot \tau$ avec $\sigma \in RS(T)$
$\tau \in CS(T)$?

Réponse : exactement les permutations π tq

(P) $\nexists\, i, j$ ds i, j m̄ colonne de T
$\pi(i), \pi(j)$ m̄ ligne de T.

$\longrightarrow$ Si π vérifie (P), $\alpha_{\pi} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signe qui dép de } \pi, T, \ldots}}{\pm} \alpha_{Id}$

Pas de x !

$\longrightarrow$ Et si π ne vérifie pas (P) ?
Soit $\underbrace{i, j \text{ ds m̄ colonne de } T}_{\sim (i,j) \in CS(T)}$ tq $\underbrace{\pi(i), \pi(j) \text{ m̄ ligne de } T}_{(\pi(i), \pi(j)) \in RS(T)}$

$\alpha_\pi \underset{\substack{\uparrow \\ (1')}}{=} \alpha_{(\pi(i), \pi(j))\, \pi} = \alpha_{\pi \cdot (i,j)} \underset{\substack{\uparrow \\ (2')}}{=} -\alpha_\pi \Rightarrow \boxed{\alpha_\pi = 0}$

B. Soit $V_\lambda = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_\lambda$

ex : $V_\lambda = \mathrm{Vect}\left(e_\pi \cdot (X_1 - X_2)\right)$

$$e_\pi \cdot X_1 = \sum_{\sigma(1)=\pi(1)} e_\sigma \qquad e_\pi \cdot X_2 = \sum_{\sigma(2)=\pi(1)} \sigma$$

i.e. $e_\pi (X_1 - X_2)$ ne dépend que de $\pi(1)$

si $\pi(1) = i$, posons $u_i := e_\pi \cdot (X_1 - X_2)$

⚠ $u_1 + \dots + u_n = 0$

V_λ de dim $n-1$.

② action de S_n : $e_\tau \cdot (u_i) = e_\tau \cdot e_\pi \cdot (X_1 - X_2)$

$$= e_{\tau\pi} \cdot (X_1 - X_2)$$

$$= u_{\tau\pi(1)} = u_{\tau(i)}$$

$\longrightarrow$ on obtient un quotient de la repr. géométrique

$\Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow \quad \Updownarrow$

c_λ^2 vérifie les conditions (1) et (2)

① $$c_\lambda^2 = X_1^2 - X_1 X_2 - X_2 X_1 + X_2^2$$

exercice : $X_1^2 = (n-1)!\, X_1 \qquad X_2 X_1 = (n-2)! \left(\sum_{\sigma \in S_n} \sigma - X_1\right)$

$X_1 X_2 = (n-1)!\, X_2 \qquad X_2^2 = (n-2)! \left(\sum_{\sigma \in S_n} \sigma - X_2\right)$

$$\Longrightarrow \quad c_\lambda^2 = \left((n-1)! + (n-2)!\right)(X_1 - X_2)$$

$$= n \cdot (n-2)!\; c_\lambda$$

Rq: ds l'ex $\dim(V_\lambda) = \underbrace{n-1}_{n_1}$

$$c_\lambda \cdot c_\lambda = \underbrace{n(n-2)!}_{n_2}\, c_\lambda$$

produit $n_1 \cdot n_2 = n!$

Lemme: C'est toujours vrai!

En effet, regardons action à droite de c_λ sur $\mathbb{C}[S_n]$

$$\mathbb{C}[S_n] = \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \oplus \text{un compl.}$$

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}[S_n]c_\lambda \\ \text{compl} \end{array} \left(\begin{array}{c|c} n_\lambda \cdot \mathrm{Id} & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dc $\mathrm{tr}_{\mathbb{C}[S_n]}(r_{c_\lambda}) = n_\lambda \cdot n_1 = n! \cdot \underbrace{[id]\,c_\lambda}_{1}$ ∎

En particulier $p_\lambda = \dfrac{\dim(V_\lambda)}{n!} \cdot c_\lambda$ est un projecteur

Proposition : V_λ irréd.

Preuve : Soit $W \subseteq V_\lambda$ ss-esp. stable. On veut montrer que $W = \{0\}$ $= V_\lambda$.

. Par le lemme A, $W = \mathbb{C}[S_n] p_W$ pr $p_W \in \mathbb{C}[S_n]$ ac $p_W^2 = p_W$.

. $p_W \in W \Rightarrow p_W = x_W \cdot c_\lambda$ pr $x_W \in \mathbb{C}[S_n]$.

Regardons $c_\lambda \cdot p_W = c_\lambda \cdot x_W \cdot c_\lambda = \alpha_W \cdot c_\lambda$ pour un $\alpha_W \in \mathbb{C}$ (lemme B)

* si $\alpha_W = 0$, $\underbrace{x_W c_\lambda \cdot p_W}_{= p_W^2 = p_W} = 0 \Rightarrow \boxed{W = 0}$

* si $\alpha_W \neq 0$, $c_\lambda = \frac{1}{\alpha_W} c_\lambda \cdot p_W \in W$

$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{C}[S_n] \cdot c_\lambda}_{V_\lambda} \subseteq W$ (car W stable par mult. à gauche)

$\Rightarrow \boxed{W = V_\lambda}$. ∎

C- Prop : V_λ et V_μ sont non isomorphe si $\lambda \neq \mu$

On a choisi
T et T' tableau de forme λ et μ.

On suppose $\lambda < \mu$ (ordre lexicographique
i.e. le premier $\lambda_i - \mu_i \neq 0$ est < 0).

Lemme : $\exists\, i,j$ ds m̄ ligne de T'.
ds m̄ colonne de T.

Preuve : si $\lambda_1 + \dots + \lambda_r < \mu_1 + \dots + \mu_r$,
parmi les entiers ds les r premières lignes de T, il y en a $r+1$ ds une m̄ colonne de T.
puis "principe des tirroirs". ∎

Fin de la preuve de la prop :

. Rappelons que $c_\lambda \cdot V_\lambda \neq \{0\}$. On va montrer que $c_\lambda \cdot V_\mu = \{0\}$.
(car $c_\lambda \cdot c_\lambda \neq 0$)

Regardons $c_\lambda \cdot c_\mu$

$$c_\lambda \cdot c_\mu = \underbrace{c_\lambda\,(i,j)}_{= -c_\lambda \text{ car } (i,j) \in CS(T)}\ \underbrace{(i,j)\,c_\mu}_{= c_\mu \text{ car } (i,j) \in RS(T')} = -c_\lambda \cdot c_\mu \Rightarrow c_\lambda \cdot c_\mu = 0$$

(on prend les i,j du Lemme ci-dessus)

plus g^{alt} $c_\lambda \cdot \pi \cdot c_\mu = c_\lambda\,(\pi(i), \pi(j))\,\pi\,(i,j)\,c_\mu \Rightarrow c_\lambda\,\pi \cdot c_\mu = 0$

Question : peut-on trouver i,j tq $(i,j) \in RS(T')$ et $(\pi(i), \pi(j)) \in CS(T)$?
Réponse : oui, il suffit d'appliquer le Lemme à T' et $\pi^{-1}(T)$ ∎

Conclusion:

car il y en a le bon nb
et elles st 2 à 2 miso

on a construit toutes les irrep de S_n.

- construction astucieuse ms élémentaire.

Prochaine séance:

- on va calculer leur trace (i.e. caractère)

$\Rightarrow$ nouvelle formule
dt combinatoire est riche...