Approche Duale des représentations du groupe symétrique

Valentin Féray

Cours Peccot, Collège de France

Spartacus Supérieur
Collection Les cours Peccot

Approche Duale des représentations du groupe symétrique

Cours Peccot, Collège de France

Valentin Féray

Chargé de recherche au CNRS
Assistant professor for pure Mathematics
Institut für Mathematik, Universität Zürich

Préface de Pierre Cartier

Janvier-février 2013

Spartacus IDH

ISBN : 978-2-36693-010-8

Préface

Il est difficile d'innover dans un sujet aussi vénérable que l'étude des caractères des groupes symétriques. Le sujet a pris forme dans l'article fondateur de Frobenius en 1900, suivi presque aussitôt par Schur en 1901. Une nouvelle méthode a été développée par Young en 1928, à qui l'on doit l'approche combinatoire formée par les diagrammes (et tableaux) dis, depuis, de Young. Ces derniers fournissent une représentation très intuitive à des résultats subtils d'algèbre. À côté d'un intérêt purement mathématique, on doit à H. Weyl dans son grand ouvrage « Théorie des groupes et mécanique quantique » l'introduction d'un outil performant (et mal compris au début du fait de sa nouveauté) dans la théorie des spectres moléculaires.

Une direction tout-à-fait indépendante a été développée par l'école de la cité d'Euler (aux noms successifs variés : Petropolis, Saint-Petersbourg, Petrograd, Léningrad, puis à nouveau Saint-Petersbourg). Dans la science de l'époque soviétique, Saint-Petersbourg a gardé son originalité vis-à-vis de Moscou (hautement proclamée par mon ami Ludwig Faddeev). Une école brillante : Vershik, Kerov, Olshanskii, Ivanov, Okunkov, bien au courant des méthodes probabilistes et inspirée aussi par la physique mathématique, a introduit une **méthode duale**. Dans le cas du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$, les classes de conjugaison **et** les caractères sont paramétrés par des partitions de l'entier n, et la table des caractères se traduit par une fonction $\chi^\lambda(\mu)$ (où λ correspond au caractère et μ à une classe de conjugaison). Limitons-nous au cas où μ est de la forme $k.1^{\langle n-k\rangle}$ (correspondant à un cycle γ_k d'ordre k, avec $1 \leq k \leq n$). Pour k fixé et $\mu = k.1^{\langle n-k\rangle}$, considérons $\chi^\lambda(\mu)$ comme une fonction d'une partition λ de taille variable $n \geq k$. Stanley a fait la découverte importante que, lorsque λ est de la forme $p \times q$ (p lignes égales de longueur q), alors le caractère normalisé

$$\mathrm{Ch}_k(\lambda) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{\chi^\lambda(\gamma_k)}{\chi^\lambda(1)}$$

est un polynôme en p et q. Il a postulé qu'un résultat de ce type vaut plus généralement lorsque λ est **multirectangulaire** de la forme $(p_1,\dots,p_m)\times(q_1,\dots,q_m)$. C'est un des résultats nouveaux démontrés dans cet ouvrage par son découvreur V. Féray. La technique nouvelle est celle des **cartes** (ou graphes en ruban).

On a mentionné que la quantité $\mathrm{Ch}_k(\lambda)$ est polynomiale en $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ si λ est de la forme multirectangulaire $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ (avec $\mathbf{p} = (p_1,\dots,p_m)$ et $\mathbf{q} = (q_1,\dots,q_m)$). On peut montrer que les termes de plus haut degré sont de la forme $R_{k+1}(\mathbf{p}\times\mathbf{q})$ où R_{k+1} est homogène de degré $k+1$. La connaissance des polynômes homogènes $R_2, R_3, \ldots$ suffit pour déterminer les polynômes Ch_k ; voici le début d'une table calculée par Ph. Biane

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}_1 = R_2\\
&\mathrm{Ch}_2 = R_3\\
&\mathrm{Ch}_3 = R_4 + R_2\\
&\mathrm{Ch}_4 = R_5 + 5R_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On constate que les coefficients sont des entiers positifs. Cette conjecture de Kerov a été démontrée par V. Féray, et expliquée dans le présent ouvrage.

Les sujets traités dans ce livre touchent à trois développements importants, dont seul le premier est abordé ici.

1. Lorsque n tend vers l'infini, la forme d'un diagramme de Young **aléatoire**, renormalisé par une homothétie de rapport $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour ramener l'aire totale à l'unité, a une limite (en probabilité) [(1)].

2. Les relations entre les polynômes Ch_k et R_{k+1} s'expliquent par celles entre les **cumulants** et les **cumulants libres**. Il s'agit là d'une intervention de la théorie des probabilités libres de Voiculescu.

3. Les groupes symétriques s'organisent en une chaîne

$$\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}_2 \subset \mathscr{S}_3 \subset \cdots \subset \mathscr{S}_n \subset \mathscr{S}_{n+1} \subset \cdots$$

dont la réunion est le groupe $\mathscr{S}_\infty$. L'étude des représentations de ce groupe infini discret est une application exemplaire de la théorie des algèbres d'opérateurs de von Neumann.

Dans un volume en préparation qui fera suite au présent ouvrage, je développerai l'application des probabilités libres (et des partitions non-croisées). D'ici là, bonne lecture du travail de V. Féray !

Pierre Cartier
Directeur de Recherches émérite (CNRS)
Institut des Hautes Étude Scientifiques
91440 Bures-sur-Yvette

(1) Voir pages 58 et 59 le résultat de simulations numériques.

Avant-propos

Ce livre reprend le contenu d'une série de quatre leçons faites au collège de France en janvier/février 2013. Ces cours ont été donnés dans le cadre de la fondation Claude-Antoine Peccot que je remercie pour m'avoir offert cette très belle opportunité.

L'objectif du cours était de faire un petit panorama de certains résultats récents sur les représentations du groupe symétrique, particulièrement des résultats de nature combinatoire rentrant dans le cadre de l'approche *duale*, initiée par S. Kerov et G. Olshanski dans les années 90. Il m'est bien sûr impossible d'être exhaustif sur ce large sujet, et les choix faits ont été biaisés afin d'inclure mes propres travaux. Il y aurait beaucoup plus à dire sur le sujet.

Après quelques rappels sur les représentations des groupes finis en général, le premier chapitre donne une construction des représentations irréductibles du groupe symétrique. Celle-ci est ensuite utilisée dans le deuxième chapitre pour calculer les caractères irréductibles. On obtient une formule avec une riche combinatoire sous-jacente. Le troisième chapitre illustre une application de cette combinatoire à un problème posé par S. Kerov. On voit en particulier apparaître naturellement une opération combinatoire introduite récemment, l'inclusion-exclusion cyclique. Dans le quatrième chapitre, nous présentons l'approche de S. Kerov pour étudier des grands diagrammes de Young sous la mesure de Plancherel. Quand on connaît la théorie présentée dans les chapitres précédents, il est relativement aisé de décrire la forme limite de ces diagrammes. Enfin, dans le cinquième chapitre, nous esquissons un cadre dans lequel la plupart des résultats précédents se généralisent conjecturalement.

Les trois premiers chapitres correspondent chacun à une séance de deux heures, alors que les chapitres 4 et 5 correspondent à la dernière séance. En tant que notes de cours, le style de ce document est parfois informel. J'ai cependant essayé de donner les preuves du plus possible de résultats énoncés.

Pour finir, je souhaite remercier Mathilde Bouvel et Julien Courtiel qui m'ont prêté leurs notes des exposés faits à Bordeaux sur le même sujet et Pierre Cartier pour ses relectures attentives et ses remarques constructives. Un merci tout particulier à Victor Rabiet, sans qui ce texte n'aurait pas vu le jour : il a largement dépassé son rôle d'éditeur, tout d'abord en tapant une première version de ces notes, puis en coordonnant activement les différentes relectures. Merci aussi à tous ceux qui ont pris le temps de venir assister à ces exposés, que ce soit à Paris ou à Bordeaux.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Représentations du groupe symétrique

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats de la théorie des représentations du groupe symétrique qui nous seront utiles dans la suite du cours. Il n'y a pas de prérequis.

La première section est une présentation de la théorie pour un groupe fini quelconque. Comme ces résultats sont très classiques, nous omettons les preuves. Quelques références sont données à la fin du chapitre.

La seconde section concerne le groupe symétrique en particulier. Elle décrit la construction d'une famille importante de représentations, dites *irréductibles*. Il existe plusieurs méthodes pour cela dans la littérature. Nous présentons ici celle dite du *symétriseur de Young*.

1 Quelques notions de théorie des représentations des groupes finis

1.1 Définitions

Nous nous limitons ici au cas d'un groupe G fini.

Définition 1.1 (Représentation d'un groupe fini).

Une **représentation** de G est un couple (V,ρ), où

- V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ;
- ρ est un morphisme de groupe de G dans $\mathrm{GL}(V)$.

Exemple 1.2.

- Si $G = \mathscr{S}_n$ est le **groupe symétrique** d'ordre n, c'est-à-dire le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments, on considère

$$\rho : \begin{cases} \mathscr{S}_n & \to & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \\ \text{permutation} & \mapsto & \text{matrice de permutation.} \end{cases}$$

Autrement dit, si $\mathbb{C}^n = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, on définit

$$\rho(\sigma).e_i = e_{\sigma(i)}.$$

Cette représentation s'appelle **représentation géométrique**[(a)].

- Soit G un groupe quelconque. Soit $V = \mathbb{C}[G]$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel qui possède une base $(e_g)_{g\in G}$ indexée par les éléments de G. On définit

$$\rho(h).e_g = e_{hg}. \tag{1.1}$$

Alors, (V, ρ) est une représentation de G, appelée **représentation régulière (gauche)**.

(*a*) Dans le cadre des groupes de Coxeter, le terme de *représentation géométrique* est parfois utilisé pour désigner le quotient de dimension $n-1$ de cette représentation considéré dans l'exemple 1.26.

Définition 1.3 (Caractère).

Soit (V, ρ) une représentation de G. Le **caractère** χ^V de (V, ρ) est, par définition

$$\chi^V : \begin{cases} G \to & \mathbb{C} \\ g \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{cases}.$$

Remarque 1.4. On omet souvent dans les notations le morphisme de la représentation (ici χ^V devrait être noté en toute rigueur $\chi^{V,\rho}$).

Exemple 1.5.

- Le caractère de la représentation géométrique est donné par

$$\chi^{\text{géom}}(\sigma) = F(\sigma),$$

où σ est une permutation de $\mathscr{S}_n$ et $F(\sigma)$ son nombre de points fixes.

- Le caractère de la représentation régulière gauche est donné par

$$\chi^{\text{reg}}(h) = |G|\delta_{h,1_G}, \tag{1.2}$$

où h est un élément de G, 1_G son élément neutre, $|G|$ la taille du groupe et $\delta_{h,1_G}$ le symbole de Kronecker qui vaut 1 si et seulement si $h = 1_G$. En effet, $\rho(h)$ permute les éléments de la base $(e_g)_{g\in G}$ de $\mathbb{C}[G]$. Sa trace est donc le nombre d'éléments fixes, *i.e.* le nombre de $g \in G$ tels que $hg = g$, soit $|G|$ si $h = 1_G$ et 0 sinon.

1.2 Classification des représentations et représentations irréductibles

Le problème principal en théorie des représentations est le suivant : pour un groupe G donné, décrire, à isomorphisme près, toutes ses représentations. Il y en a une infinité, mais on va pouvoir les déduire d'une construction élémentaire et d'un nombre fini de briques de bases. La définition suivante présente cette construction élémentaire.

Définition 1.6.

Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations du groupe G ; on peut construire une troisième représentation, appelée **somme directe** de (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) définie par :

$$\left(V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2\right),$$

où $V_1 \oplus V_2$ est la somme directe de V_1 et de V_2 et où $\rho_1 \oplus \rho_2$ est défini par

$$\rho_1 \oplus \rho_2(g)(v_1, v_2) = \left(\rho_1(g).v_1, \rho_2(g).v_2\right).$$

Notons que cette définition se comporte bien avec la notion de caractère, c'est-à-dire que

$$\chi^{V_1 \oplus V_2}(g) = \chi^{V_1}(g) + \chi^{V_2}(g).$$

Passons maintenant à la définition des briques de bases.

Définition 1.7.

Une représentation (V, ρ) est dite **indécomposable** si (V, ρ) ne peut pas s'écrire (autrement que de manière triviale) sous la forme $\left(V_1 \oplus V_2, \rho_1 \oplus \rho_2\right)$.

Une représentation est dite **irréductible** s'il n'y a pas de sous-espace non trivial (*i.e.* différent de $\{0\}$ et de V) $V_1 \subseteq V$ stable par $\rho(g)$ $(\forall g \in G)$.

Si V s'écrit comme une somme directe non triviale $V_1 \oplus V_2$, alors V_1 et V_2 sont des sous-espaces stables non triviaux. Par conséquent, toute représentation irréductible est indécomposable. ***Pour les représentations des groupes finis***, la réciproque est vraie aussi (nous omettons ici la preuve de ce résultat classique) : irréductible et indécomposable sont donc équivalents et nous utiliserons désormais uniquement le terme de représentation irréductible.

Remarque 1.8. Directement d'après les définitions, on peut voir qu'une représentation donnée s'écrit comme une somme directe de représentations irréductibles (la somme est finie du fait que l'on travaille en dimension finie). Nous allons voir que cette décomposition est essentiellement unique.

Théorème 1.9.

- Il existe un nombre fini N de représentations irréductibles (notées par la suite irrep).

$$N = \mathrm{Card}\{\text{Classes de conjugaison de } G\}.$$

On note alors $V_1, \ldots, V_N$ les représentations irréductibles de G.

- Pour toute représentation V de G, il existe une ***unique*** famille d'entiers positifs $(m_i)_{1 \le i \le N}$ tel que

$$V \simeq V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus V_N^{m_N}.$$

Remarque 1.10. Les caractères sont cruciaux dans la démonstration de ce théorème, comme nous allons le voir dans la section suivante.

1.3 Un outil : les caractères

Définition 1.11.

Une **fonction centrale** sur G est une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ telle que

- $\forall g, h \in G \qquad f(h^{-1}gh) = f(g)$,
- ou, de manière équivalente, f est constante sur les **classes de conjugaison**.

Exemple 1.12. Les caractères sont des fonctions centrales :

$$\begin{aligned} \chi(h^{-1}gh) = \mathrm{Tr}(\rho(h^{-1}gh)) &= \mathrm{Tr}(\rho(h)^{-1}\rho(g)\rho(h)) && (\rho \text{ morphisme}) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho(g)) && (\mathrm{Tr} \text{ invariante par conjugaison}) \\ &= \chi(g). \end{aligned}$$

L'ensemble des fonctions centrales est un espace vectoriel que l'on peut munir d'un produit scalaire ; ce produit scalaire est en fait défini sur l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$:

Définition 1.13.

Soit f et $f' : G \to \mathbb{C}$,

$$\langle f, f' \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{f(g)} f'(g).$$

On peut à présent énoncer le théorème qui sert à démontrer le théorème 1.9 de la section précédente :

Théorème 1.14.

Les caractères des représentations irréductibles forment une base orthonormale de l'ensemble des fonctions centrales.

Ce théorème implique le théorème 1.9. En effet, les caractères irréductibles formant une base de l'espace des fonctions centrales, leur nombre N est la dimension de cet espace. Il est facile de voir qu'il s'agit du nombre de classes de conjugaison du groupe.

L'unicité des m_i découle du résultat suivant.

Corollaire 1.15. Avec les notations du théorème 1.9, les m_i sont uniques et donnés par la formule

$$m_i = \langle \chi^V, \chi^{V_i} \rangle.$$

Démonstration. D'après la compatibilité entre caractères et somme directe, si

$$V \simeq V_1^{m_1} \oplus V_2^{m_2} \oplus \cdots \oplus V_N^{m_N},$$

alors

$$\chi^V = m_1 \chi^{V_1} + m_2 \chi^{V_2} + \cdots + m_N \chi_{V_N}.$$

Les m_i sont donc les coefficients de l'écriture de χ^V sur la base $(\chi^{V_j})_{1\leq j\leq N}$, ce qui prouve leur unicité. Comme la base $(\chi^{V_j})_{1\leq j\leq N}$ est orthonormale, ces coefficients peuvent être calculés par un produit scalaire $m_i = \langle \chi^V, \chi^{V_i}\rangle$. □

Exemple 1.16. Considérons V^{reg} la **représentation régulière (gauche)** d'un groupe G quelconque. Soit V_i une représentation irréductible de G. La multiplicité de V_i dans V^{reg} est

$$m_i = \langle \chi^{V_i}, \chi^{\text{reg}}\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi^{V_i}(g)}\chi^{\text{reg}}(g).$$

Mais $\chi^{\text{reg}}(g)$ a été calculé à l'exemple 1.5 et s'annule dès que $g \neq 1_G$. On a donc

$$m_i = \frac{1}{|G|}\cdot\overline{\chi^{V_i}(1_G)}\chi^{\text{reg}}(1_G) = \dim(V_i).$$

Bien que cela ne donne pas de décomposition explicite de V^{reg} comme une somme directe de représentations irréductibles, on en déduit que toute représentation irréductible apparaît autant de fois que sa dimension.

2 Construction, par le symétriseur de Young, des représentations irréductibles du groupe symétrique

La théorie des représentations n'est pas très intéressante pour les groupes commutatifs : toutes les représentations irréductibles sont de dimension 1. Nous nous intéresserons ici à l'exemple le plus classique de groupes non commutatifs : les groupes symétriques $\mathscr{S}_n$. Dans cette section, nous allons construire les représentations irréductibles de $\mathscr{S}_n$.

On sait déjà que le nombre N de représentations irréductibles de $\mathscr{S}_n$ est le nombre de classes de conjugaison de $\mathscr{S}_n$. Rappelons comment décrire les classes de conjugaison de $\mathscr{S}_n$.

Une permutation σ de $\mathscr{S}_n$ admet une décomposition unique (à l'ordre près) en produit de cycles disjoints. Les longueurs de ces cycles, ordonnées en ordre décroissant, forment une **partition** de n, appelée **type cyclique** de σ.

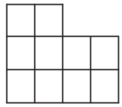
On rappelle que

Définition 1.17.

Une partition d'un entier n est une liste décroissante d'entiers strictement positifs dont la somme est n.

Exemple 1.18. $(4,4,2)$ est une partition de l'entier 10, qu'on notera désormais par $(4,4,2)\vdash 10$.
On représente souvent graphiquement les partitions par des **diagramme de Young**[(a)] : voici celui correspondant à (4,4,2) (4 cases dans la première ligne, 4 dans la seconde, 2

dans la troisième, alignées à gauche).



(a) On décrit ici la représentation dite **française** des diagrammes. La représentation dite **anglaise** est obtenue à partir de la française en appliquant une symétrie d'axe horizontal.

Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont même type cyclique. Le nombre de classes de conjugaison, et donc de représentations irréductibles de S_n, est le nombre de partitions de n.

Pour chaque partition $\lambda \vdash n$, on va construire une représentation irréductible V_λ de $\mathscr{S}_n$ [1]. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.19.

- Toute représentation irréductible est isomorphe à une sous-représentation de la représentation régulière (gauche).
- Toute sous-représentation de la représentation régulière $\mathbb{C}[G]$ est de la forme

$$\mathbb{C}[G]\cdot p = \{xp, x \in \mathbb{C}[G]\}$$

avec $p \in \mathbb{C}[G]$, d'action associée

$$\rho(g).xp = e_g.xp.$$

- De plus, on peut choisir pour p un projecteur (*i.e.* $p^2 = p$).

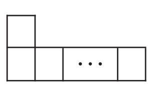
Nous allons donc construire les représentations irréductibles de $\mathscr{S}_n$ sous cette forme en suivant le plan suivant :

1. définir des éléments $C_\lambda \in \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ (où λ est une partition de n) ;
2. montrer que $V_\lambda = \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda$ est irréductible ;
3. montrer que V_λ et V_μ ne sont pas isomorphes si $\lambda \neq \mu$.

Ce dernier point montre qu'on aura alors construit toutes les représentations irréductibles, puisque, par ailleurs, on sait que le nombre des représentations irréductibles est égal au nombre de partitions de n.

2.1 Définition de C_λ

Soit λ une partition de n. Dans ce qui suit, on prendra souvent comme exemple la partition $\lambda := (n-1, 1)$, correspondant au diagramme de Young à n cases ci-dessous.



Pour définir C_λ nous allons commencer par choisir un **tableau** T de forme λ, c'est-à-dire que dans chacune des cases du diagramme de Young nous allons mettre un

(1) Pour un groupe G général, il n'est pas possible d'associer de manière *canonique* à chaque classe de conjugaison une représentation irréductible (bien que ces ensembles soient équipotents). Pour $\mathscr{S}_n$, c'est possible, comme le montre la construction de ce chapitre.

nombre de 1 à n (en utilisant chaque nombre une et une seule fois), sans conditions particulières sur leur disposition.

Dans le cadre de notre exemple, nous prendrons :

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 \\ \cline{1-1} 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \hline \end{array}.$$

Une fois fixé le remplissage T des cases du diagramme de Young, nous pouvons définir les deux éléments suivants de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ (qui possède, par définition, une base $(e_\sigma)_{\sigma\in\mathscr{S}_n}$ indexée par les permutations) :

$$a_\lambda = \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma\in\mathrm{RS}(T)}} e_\sigma,$$

où $\mathrm{RS}(T)$ désigne les permutations préservant les lignes du tableau T et

$$b_\lambda = \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma\in\mathrm{CS}(T)}} \varepsilon(\sigma) e_\sigma,$$

où $\mathrm{CS}(T)$ désigne les permutations préservant les colonnes du tableau T (et ε est la **signature** de la permutation).

Remarque 1.20. Il faut bien noter que, même si cela n'apparaît pas directement dans la notation, a_λ et b_λ dépendent de T.

Dans notre exemple

$$a_\lambda = \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_\sigma \qquad \text{et} \qquad b_\lambda = e_{\mathrm{Id}} - e_{(1\ 2)}$$

où $(1\ 2)$ désigne la transposition échangeant 1 et 2 (permutation de signature -1).

Définition 1.21.

Le **symétriseur de Young** C_λ associé à la partition λ est l'élément de $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ défini par $C_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda$.

Dans l'exemple :

$$C_\lambda = \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_\sigma - \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_{\sigma\cdot(1\ 2)} = \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_\sigma - \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma(2)=1}} e_\sigma.$$

Remarque 1.22.

1. L'identité préservant les lignes et les colonnes, elle apparaît toujours dans a_λ et b_λ, ainsi que dans leur produit C_λ ; il est facile de vérifier qu'elle apparaît dans C_λ une et une seule fois. Le coefficient $[e_{\mathrm{Id}}]C_\lambda$ de e_{Id} dans C_λ est donc 1. En particulier $C_\lambda \neq 0$.

2. On remarque que $\mathrm{RS}(T)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, par conséquent, si $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$,

$$e_\sigma \cdot a_\lambda = a_\lambda \cdot e_\sigma = a_\lambda.$$

3. De même, $\mathrm{CS}(T)$ étant aussi un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$, il vient, si $\tau \in \mathrm{CS}(T)$,

$$e_\tau \cdot b_\lambda = b_\lambda \cdot e_\tau = \varepsilon(\tau) b_\lambda.$$

4. Des deux remarques précédentes, on a, pour tous $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$ et $\tau \in \mathrm{CS}(T)$:

$$e_\sigma \cdot C_\lambda = e_\sigma \cdot a_\lambda \cdot b_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda = C_\lambda$$

et

$$C_\lambda \cdot e_\tau = a_\lambda \cdot b_\lambda \cdot e_\tau = \varepsilon(\tau) a_\lambda \cdot b_\lambda = \varepsilon(\tau) C_\lambda$$

soit

$$e_\sigma \cdot C_\lambda = C_\lambda \tag{1.3}$$
$$C_\lambda \cdot e_\tau = \varepsilon(\tau) C_\lambda. \tag{1.4}$$

Lemme 1.23. Les équations (1.3) et (1.4) déterminent C_λ à une constante multiplicative près.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$ tel que, pour tous $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$ et $\tau \in \mathrm{CS}(T)$,

$$e_\sigma \cdot x = x \tag{1}$$
$$x \cdot e_\tau = \varepsilon(\tau) x. \tag{2}$$

Comme tout élément de $\mathbb{C}[\mathcal{S}_n]$, x s'écrit sous la forme

$$\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \alpha_\pi e_\pi,$$

avec $\alpha_\pi \in \mathbb{C}$.
Observons comment les équations (1) et (2) se traduisent sur les α_π :

$$\begin{cases} (1) & \iff \quad \forall \sigma \in \mathrm{RS}(T), \quad \left(\alpha_\pi = \alpha_{\sigma\pi}, \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n\right) \\ (2) & \iff \quad \forall \tau \in \mathrm{CS}(T), \quad \left(\alpha_\pi = \varepsilon(\tau)\alpha_{\pi\tau}, \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n\right). \end{cases}$$

Ainsi, pour $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$ et $\tau \in \mathrm{CS}(T)$, il vient

$$\alpha_{\sigma\tau} = \alpha_\tau = \varepsilon(\tau)\alpha_{\mathrm{Id}}.$$

Rappelons que nous voulons prouver que l'espace des solutions de (1) et (2) est de dimension 1. Pour les permutations π de la forme $\sigma\tau$ (avec $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$, $\tau \in \mathrm{CS}(T)$), nous venons de voir que α_π s'exprime en fonction d'un seul paramètre α_{id}.
On en vient donc à la question : quelles sont les permutations π de $\mathcal{S}_n$ s'écrivant $\sigma\tau$ (avec $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$, $\tau \in \mathrm{CS}(T)$) ? Il n'est pas difficile de vérifier la CNS suivante.

> **Condition Nécessaire et suffisante** : il n'existe pas i, j (avec $i \neq j$) dans une même colonne du tableau T tel que $\pi(i)$ et $\pi(j)$ soient dans la même ligne de T. (P)

Si π vérifie (P), alors

$$\alpha_\pi = \pm \alpha_{\mathrm{Id}}.$$

Le signe ± 1 en facteur dépend de π, de T, mais ***pas*** de x. Pour ce type de permutations π, on a donc un unique degré de liberté.

On s'intéresse à présent aux permutations qui ne vérifient pas (P) : nous allons monter que leur coefficient est obligatoirement nul. Soit donc π une telle permutation. Alors il existe i, j (avec $i \neq j$) dans une même colonne de T tel que $\pi(i)$ et $\pi(j)$ soient dans une même ligne de T. On a (en utilisant à nouveau (1) et (2))

$$\begin{aligned} \alpha_\pi &= \alpha_{(\pi(i),\pi(j))\pi} && \text{(par (1))} \\ &= \alpha_{\pi\cdot(i,j)} \\ &= -\alpha_\pi. && \text{(par (2))} \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha_\pi = 0.$$

On n'a donc pas de degré de liberté supplémentaires pour les coefficients des permutations ne vérifiant pas (P), ce qui conclut la démonstration. □

Remarque 1.24. C_λ^2 vérifie (1) et (2). Plus généralement, $C_\lambda \cdot e_\pi \cdot C_\lambda$, ou encore $a_\lambda \cdot e_\pi \cdot b_\lambda$ vérifient (1) et (2). Ils sont donc proportionnels à C_λ (c'est loin d'être évident sur les formules !).

Exemple 1.25. Dans l'exemple que l'on avait choisi, $C_\lambda = X_1 - X_2$, avec

$$X_1 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_\sigma \quad \text{et} \quad X_2 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{S}_n \\ \sigma(2)=1}} e_\sigma.$$

Donc, en prenant garde que l'on se trouve dans une algèbre non commutative :

$$C_\lambda^2 = X_1^2 - X_1X_2 - X_2X_1 + X_2^2.$$

On vérifie facilement que

$$X_1^2 = (n-1)!X_1, \qquad X_2X_1 = (n-2)!\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} e_\sigma - X_1\Big),$$
$$X_1X_2 = (n-1)!X_2, \qquad X_2^2 = (n-2)!\Big(\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} e_\sigma - X_2\Big),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} C_\lambda^2 &= \big((n-1)! + (n-2)!\big)(X_1 - X_2) \\ &= n(n-2)!C_\lambda. \end{aligned}$$

2.2 Preuve de l'irréductibilité

Le but de ce qui suit est de prouver que

$$V_\lambda := \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda$$

est irréductible. Pour fixer les notations, commençons par regarder à quoi ressemble cet espace dans notre exemple.

Exemple 1.26. Dans notre cas particulier

$$V_{(n-1,1)} = \mathrm{Vect}\left(e_\pi(X_1 - X_2)\right)_{\pi \in \mathcal{S}_n}.$$

Attention : comme on va le voir ci-dessous, la famille $\left(e_\pi(X_1 - X_2)\right)_{\pi \in \mathcal{S}_n}$ n'est pas une base.

On a

$$e_\pi X_1 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(1)=1}} e_{\pi\sigma} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(1)=\pi(1)}} e_\sigma$$

et

$$e_\pi X_2 = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(2)=1}} e_{\pi\sigma} = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(2)=\pi(1)}} e_\sigma.$$

On remarque que $e_\pi X_1$ et $e_\pi X_2$ ne dépendent que de $\pi(1)$ et par conséquent leur différence $e_\pi(X_1 - X_2)$ ne dépend elle aussi que de $\pi(1)$.

On définit

$$u_i := e_\pi(X_1 - X_2), \qquad \text{où} \quad \pi \in \mathcal{S}_n \quad \text{avec} \quad \pi(1) = i.$$

alors

$$V_{(n-1,1)} = \mathrm{Vect}(u_i) \qquad \text{et} \qquad u_1 + \cdots + u_n = 0.$$

On peut montrer que $\dim\left(V_{(n-1,1)}\right) = n-1$.

Observons à présent comment le groupe symétrique agit sur ces u_i. On a

$$\begin{aligned} \rho(\pi').u_i &= e_{\pi'} \cdot e_\pi(X_1 - X_2) && (\pi \in \mathcal{S}_n \text{ et } \pi(1) = i) \\ &= e_{\pi'\pi}(X_1 - X_2) \\ &= u_{\pi'(i)}. && (\text{car } \pi'\pi(1) = \pi'(i)) \end{aligned}$$

On reconnaît la définition de la représentation géométrique (p. 2), à ceci près que les u_i ne forment pas une base. Ce que l'on obtient est le quotient de la représentation géométrique par son sous-espace stable $\mathrm{Vect}\left((u_1 + \cdots + u_n)\right)$.

Proposition 1.27.

V_λ est une représentation irréductible.

Démonstration. Il faut d'abord vérifier que $V_\lambda \neq \{0\}$, mais cela découle immédiatement du fait que $C_\lambda \neq 0$.

On se rappelle qu'il y a deux caractérisations équivalentes des représentations irréductibles : soit la représentation ne peut s'écrire (de manière non triviale) sous la forme d'une somme directe, soit elle ne possède pas de sous-espace (non trivial) stable par le morphisme ρ associé. Pour prouver qu'une représentation est irréductible, la deuxième caractérisation est la plus simple.

Soit donc $W \subseteq V_\lambda$ un sous-espace stable par l'action de $\mathscr{S}_n$.
On veut montrer que $W = \{0\}$ ou $W = V_\lambda$.
En utilisant le lemme 1.19, on a que W s'écrit

$$\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]p_W,$$

où p_W est un projecteur (*i.e.* $p_W^2 = p_W$).
Puisque p_W appartient à W, il appartient en particulier à V_λ et donc

$$p_W = x_W C_\lambda$$

pour un certain $x_W \in \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$.
Regardons $C_\lambda p_W$:

$$C_\lambda p_W = C_\lambda x_W C_\lambda = \alpha_W C_\lambda$$

avec $\alpha_W \in \mathbb{C}$, d'après la remarque 1.24, puisque $C_\lambda x_W C_\lambda$ vérifie les équations (1) et (2) du lemme 1.23.

- Si $\alpha_W = 0$, alors $C_\lambda p_W = 0$ et donc (p_W étant un projecteur)

  $$p_W = p_W^2 = x_W C_\lambda p_W = 0$$

  ce qui implique

  $$W = \{0\}.$$

- Si $\alpha_W \neq 0$, alors

  $$C_\lambda = \frac{1}{\alpha_W} C_\lambda p_W \in W$$

  mais, par stabilité de W, on a

  $$x C_\lambda \in W$$

  pour tout $x \in \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$, ce qui montre l'inclusion de V_λ dans W, et par suite (l'inclusion réciproque étant vraie par hypothèse),

  $$W = V_\lambda.$$

En conclusion, V_λ est irréductible. □

Notons que ni la définition de V_λ, ni la preuve ci-dessus ne nous donnent de renseignements sur la dimension de V_λ. Il est possible de relier ce nombre au facteur de proportionnalité entre C_λ^2 et C_λ.

Proposition 1.28.

Soient $n_1 := \dim(V_\lambda)$ et n_2 le nombre tel que $C_\lambda^2 = n_2 C_\lambda$ (voir remarque 1.24), alors

$$n_1 n_2 = n!.$$

Démonstration. On regarde la multiplication ***à droite*** par C_λ (action notée r_{C_λ}) sur $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ et on calcule sa trace de deux manières différentes.

Représentations groupes finis Caractères irréductibles Polynômes de Kerov Grands diagrammes Généralisation

Représentations groupes finis
Caractères irréductibles
Polynômes de Kerov
Grands diagrammes
Généralisation

- Premièrement, on a, d'après la remarque 1.22,

$$C_\lambda = \sum_{\pi \in \mathscr{S}_n} \alpha_\pi e_\pi \qquad \text{avec} \quad \alpha_{\mathrm{Id}} = 1.$$

La trace de la multiplication à droite par C_λ est donc

$$\mathrm{Tr}\left(r_{C_\lambda}\right) = \sum_{\pi \in \mathscr{S}_n} \alpha_\pi \,\mathrm{Tr}\left(r_{e_\pi}\right)$$

(où r_{e_π} désigne la multiplication à droite par e_π), par linéarité de la trace et de la multiplication à droite. Or, $\pi \mapsto r_{e_\pi}$ est la représentation régulière droite. Sa définition est similaire à celle de la représentation régulière gauche, voir l'équation (1.1). Le calcul du caractère est identique et on a, d'après l'équation (1.2)

$$\mathrm{Tr}\left(r_{e_\pi}\right) = n!\,\delta_{\pi,\mathrm{id}},$$

ce qui donne

$$\mathrm{Tr}\left(r_{C_\lambda}\right) = n!\alpha_{\mathrm{id}} = n!\,.$$

- D'autre part, prenons un complémentaire V_2 quelconque de $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda$. Par définition,

$$\mathbb{C}[\mathscr{S}_n] = \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda \oplus V_2.$$

Dans cette décomposition en somme directe, la matrice de r_{C_λ} s'écrit :

$$\mathrm{Mat}\left(r_{C_\lambda}\right) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda \qquad\qquad & V_2 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} n_2 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & n_2 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n_2 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]C_\lambda \\ \\ \\ V_2 \end{array} \end{array}$$

Par conséquent, n_1 étant la dimension du bloc en haut à gauche,

$$\mathrm{Tr}\left(r_{C_\lambda}\right) = n_1 n_2.$$

En comparant les deux formules obtenues pour $\mathrm{Tr}\left(r_{C_\lambda}\right)$, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Corollaire 1.29. Si on définit

$$p_\lambda := \frac{\dim\left(V_\lambda\right)}{n!} C_\lambda,$$

alors p_λ est un projecteur.

Notons que V_λ peut alors être défini comme $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]p_\lambda$, et c'est sous cette forme que nous allons le regarder au chapitre suivant.

2.3 Non-isomorphisme

Il nous reste à démontrer le résultat suivant.

Proposition 1.30.

Si λ et μ sont deux partitions différentes de l'entier n, alors V_λ et V_μ sont non isomorphes.

Démonstration. Quitte à permuter les variables λ et μ, on suppose, dans la suite de la démonstration, que $\lambda < \mu$ (pour l'ordre lexicographique).
Regardons alors $\rho^{V_\lambda}\left(C_\lambda\right)$ et $\rho^{V_\mu}\left(C_\lambda\right)$: nous allons démontrer que

$$\operatorname{Im}\left(\rho^{V_\lambda}\left(C_\lambda\right)\right) \neq \{0\}, \tag{a}$$

et

$$\operatorname{Im}\left(\rho^{V_\mu}\left(C_\lambda\right)\right) = \{0\}. \tag{b}$$

Pour (a), en faisant agir $\rho^{V_\lambda}\left(C_\lambda\right)$ sur C_λ, et en utilisant la proposition 1.28 et la remarque 1.22, on a

$$\rho^{V_\lambda}\left(C_\lambda\right).C_\lambda = C_\lambda^2 = \frac{n!}{\dim\left(V_\lambda\right)} C_\lambda \neq 0.$$

Démontrons (b). On se rappelle que pour construire V_λ (et V_μ) on doit se fixer un tableau : on s'est donc fixé, implicitement, deux tableaux T et T' de formes respectives λ et μ.
Nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 1.31. Soient T et T' deux tableaux de formes λ et μ. Supposons $\lambda < \mu$. Alors il existe $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, tels que

- i et j sont dans une même ligne de T' ;
- i et j sont dans une même colonne de T.

Démonstration. Comme $\lambda < \mu$, il existe $r \leq n$, tel que

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_r < \mu_1 + \cdots + \mu_r.$$

Pour comprendre la logique de la démonstration, raisonnons sur un cas particulier, avec, par exemple, $n = 9$, $\lambda = (4,3,2)$ et $\mu = (4,4,1)$. Regardons par exemple les tableaux suivants de forme λ et μ :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ \hline 6 & 1 & 9 & 7 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 \\ \hline 5 & 7 & 2 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 1 & 9 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} T & T' \\ \lambda = (4,3,2) & \mu = (4,4,1) \end{array}$$

Ici $r = 2$: je regarde les deux premières lignes (en partant du bas) de T'.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \times & \times \\ \hline \end{array}$$

Elles contiennent les nombres 12356789, que l'on retrouve dans les cases suivantes de T.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-2} \times & \times \\
\cline{1-3} \times & & \times \\
\hline \times & \times & \times & \times \\
\hline
\end{array}$$

Ce qui nous intéresse c'est une propriété sur les colonnes de T, donc je peux supposer que ces éléments sont toujours rangés de bas en haut (sans « trous ») dans les colonnes de T :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-2} \times & \\
\cline{1-3} \times & \times & \times \\
\hline \times & \times & \times & \times \\
\hline
\end{array}$$

Puisque $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r < \mu_1 + \cdots + \mu_r$, au moins une des $\mu_1 + \cdots + \mu_r$ croix n'est pas dans les r premières lignes de T. Comme on a considéré qu'il n'y avait pas de « trous » dans les colonnes de T, cela revient à dire que l'une des colonnes de T contient au moins $r+1$ croix (que l'on entoure dans le dessin suivant). Ces croix correspondent aux nombres 2, 3 et 6.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-2} \otimes & \\
\cline{1-3} \otimes & \times & \times \\
\hline \otimes & \times & \times & \times \\
\hline
\end{array}$$

Par le principe des tiroirs, parmi les $r+1$ éléments correspondant à ces croix, au moins deux sont dans la même ligne de T' (ils sont tous par définition dans les r premières lignes de T'). Dans notre exemple, il s'agit des nombres 3 et 6.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{1-1} \\
\hline \times & \times & \otimes & \times \\
\hline \otimes & \otimes & \times & \times \\
\hline
\end{array}$$

Ces deux éléments répondent ainsi, par construction, à la condition recherchée. $\square$

Revenons à la démonstration de non-isomorphie de V_λ et V_μ. On veut montrer que

$$\operatorname{Im}\left(\rho^{V_\mu}\left(C_\lambda\right)\right) = \{C_\lambda x C_\mu, x \in \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]\}$$

est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que

$$C_\lambda \cdot e_\pi \cdot C_\mu = 0$$

pour tout π dans $\mathscr{S}_n$.

- Si $\pi = \mathrm{Id}$, alors, en appliquant le lemme précédent, il existe i et j ($i \neq j$) appartenant à une même ligne de T' et à une même colonne de T, et (en utilisant les relations (1.3) et (1.4))

$$C_\lambda \cdot C_\mu = \underbrace{C_\lambda e_{(i\ j)}}_{-C_\lambda} \underbrace{e_{(i\ j)} C_\mu}_{C_\mu} = -C_\lambda \cdot C_\mu,$$

ce qui implique

$$C_\lambda \cdot C_\mu = 0.$$

- Dans le cas général, il existe i et j $(i \neq j)$ appartenant à une même ligne de T' et tels que $\pi(i)$ et $\pi(j)$ appartiennent à une même colonne de T : en effet, il suffit d'appliquer le lemme 1.31 à [2] $\pi^{-1}(T)$ et à T', en remarquant que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
  - $\pi(i)$ et $\pi(j)$ appartiennent à une même colonne de T ;
  - i et j appartiennent à une même colonne de $\pi^{-1}(T)$.

  On a alors (puisque $(\pi(i),\pi(j)) \cdot \pi \cdot (i\ j) = \pi$)
  $$C_\lambda e_\pi C_\mu = \underbrace{C_\lambda e_{(\pi(i),\pi(j))}}_{-C_\lambda} e_\pi \underbrace{e_{(i\ j)} C_\mu}_{C_\mu} = -C_\lambda e_\pi C_\mu,$$
  ce qui implique
  $$C_\lambda e_\pi C_\mu = 0. \qquad \square$$

Notes et références

Tout le contenu de ce chapitre est très classique. La théorie des représentations du groupe symétrique remonte aux travaux de Frobenius vers 1900 et de Young vers 1925. Il existe de nombreuses références modernes sur le sujet. Citons-en deux, utilisées dans la préparation de ce cours [FH 91, Sag 01].

Il existe d'autres manières d'étudier les représentations du groupe symétrique. Mentionnons une construction abstraite (*i.e.* pas comme un sous-espace de la représentation régulière) des représentations irréductibles : les modules de Specht. On peut aussi calculer les caractères irréductibles sans construire les représentations associées grâce à la formule de Frobenius (voir chapitre 5). Cette dernière relie les représentations des groupes symétriques à la théorie des polynômes symétriques.

Notons aussi que les représentations du groupe symétrique ont de multiples applications : matrices aléatoires [DS 94], battage de cartes [TT 00], isomorphie entre graphes [MRŚ 10]...

(2) On désigne par $\pi^{-1}(T)$ le tableau de la même forme que T, contenant la quantité $\pi^{-1}(i)$ dans la case contenant i dans le tableau T d'origine. Sur un exemple :

$$T = \begin{array}{|c|c}\hline 3 & \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \pi^{-1}(T) = \begin{array}{|c|c}\hline \pi^{-1}(3) & \\ \hline \pi^{-1}(1) & \multicolumn{1}{c|}{\pi^{-1}(2)} \\ \hline \end{array}$$

Chapitre 2

Caractères irréductibles, fonctions N et cartes

L'objectif de la première section de ce chapitre est de calculer les caractères irréductibles (normalisés, c'est-à-dire divisés par la dimension de la représentation considérée) du groupe symétrique. Nous allons pour cela utiliser leur construction décrite dans le chapitre précédent. La formule obtenue présente une combinatoire riche que nous décrirons dans les deuxième et troisième sections de ce chapitre.

1 Calcul des caractères irréductibles de $\mathscr{S}_n$

1.1 Première formule pour les caractères

Notre but est de calculer la trace de l'opérateur suivant :

$$\rho(\pi) : \begin{cases} \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \cdot p_\lambda \to \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \cdot p_\lambda \\ \quad x \cdot p_\lambda \quad \mapsto \; e_\pi \cdot x \cdot p_\lambda \end{cases},$$

où λ est une partition de $n \in \mathbb{N}^*$ et π un élément de $\mathscr{S}_n$.

Une première difficulté est que l'on ne connaît pas, *a priori*, de base de l'espace $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \cdot p_\lambda$: on avait évoqué, dans le chapitre précédent que la famille $(e_\pi p_\lambda)_{\pi \in \mathscr{S}_n}$ n'était pas une base, la multiplication par p_λ diminuant strictement la dimension de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$.

Pour contourner cet inconvénient, nous allons nous ramener à calculer la trace d'un endomorphisme d'un espace dont nous connaissons la base. Ceci nous amène à définir l'endomorphisme suivant :

Définition 2.1.

On définit l'endomorphisme $\varphi_{\lambda,\pi}$ de $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ par

$$\varphi_{\lambda,\pi} : \begin{cases} \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \to \quad \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \\ \quad x \quad \mapsto e_\pi \cdot x \cdot p_\lambda \end{cases}.$$

Le lemme suivant justifie cette définition.

Représentations groupes finis
Caractères irréductibles
Polynômes de Kerov
Grands diagrammes
Généralisation

Lemme 2.2. $\mathrm{Tr}\left(\rho(\pi)\right) = \mathrm{Tr}\left(\varphi_{\lambda,\pi}\right)$.

Démonstration. Par définition p_λ est un projecteur, et par conséquent la multiplication à droite $r_{p_\lambda} : \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \to \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ par p_λ est encore un projecteur (en effet, dans ce cas, $r_{p_\lambda} \circ r_{p_\lambda} = r_{p_\lambda^2} = r_{p_\lambda}$).

Par un lemme classique d'algèbre linéaire, on a alors la décomposition :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[\mathscr{S}_n] &= \mathrm{Im}(r_{p_\lambda}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - r_{p_\lambda}) \\ &= \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]\cdot p_\lambda \oplus \mathbb{C}[\mathscr{S}_n]\cdot(1-p_\lambda).\end{aligned}$$

Observons comment l'application $\varphi_{\lambda,\pi}$ agit sur chacune des parties de cette décomposition en somme directe ; il vient :

$$\varphi_{\lambda,\pi}\Big|_{\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]\cdot p_\lambda} = \rho(\pi), \qquad (\text{car } p_\lambda^2 = p_\lambda)$$

$$\text{et} \quad \varphi_{\lambda,\pi}\Big|_{\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]\cdot(1-p_\lambda)} = 0. \qquad (\text{car } (1-p_\lambda)p_\lambda = 0)$$

Autrement dit, en choisissant une base adaptée à la décomposition en somme directe, on a

$$\mathrm{Mat}\left(\varphi_{\lambda,\pi}\right) \sim \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}\left(\rho(\pi)\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit directement l'égalité de traces recherchée. □

Nous sommes donc ramenés au calcul de la trace de $\varphi_{\lambda,\pi}$, endomorphisme de $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ dont, par définition, nous connaissons une base. Nous pouvons à présent calculer le caractère χ^λ de la représentation irréductible associée à λ. En rappelant que (avec les notations du chapitre précédent, *cf.* corollaire 1.29), $p_\lambda = \frac{\dim(V_\lambda)}{n!} a_\lambda b_\lambda$ et en utilisant la linéarité de la trace, on a

$$\chi^\lambda(\pi) := \mathrm{Tr}\left(\rho(\pi)\right) = \mathrm{Tr}\left(\varphi_{\lambda,\pi}\right) = \frac{\dim(V_\lambda)}{n!} \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma\in \mathrm{RS}(T)}} \sum_{\substack{\tau\in\mathscr{S}_n \\ \tau\in \mathrm{CS}(T)}} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{Tr}\left(x \mapsto e_\pi\cdot x\cdot e_\sigma\cdot e_\tau\right).$$

Or, le morphisme

$$\begin{cases} \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \to & \mathbb{C}[\mathscr{S}_n] \\ \quad x \quad\ \mapsto & e_\pi\cdot x\cdot e_\sigma\cdot e_\tau \end{cases}$$

permute les éléments de la base : il envoie le vecteur e_g sur $e_\pi\cdot e_g\cdot e_\sigma\cdot e_\tau$ qui est égal (par définition du produit dans $\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$) à $e_{\pi\cdot g\cdot\sigma\cdot\tau}$. Sa matrice est donc une matrice de permutation et sa trace est le nombre d'éléments fixes dans la base.

Par conséquent :

$$\chi^\lambda(\pi) = \frac{\dim(V_\lambda)}{n!} \sum_{\substack{\sigma\in\mathscr{S}_n \\ \sigma\in \mathrm{RS}(T)}} \sum_{\substack{\tau\in\mathscr{S}_n \\ \tau\in \mathrm{CS}(T)}} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{Card}\{g\in\mathscr{S}_n \mid g = \pi\cdot g\cdot\sigma\cdot\tau\}.$$

Nous allons manipuler cette expression pour que le membre de droite ne dépende pas du choix du tableau T (le caractère n'en dépend pas).

On a

$$g = \pi \cdot g \cdot \sigma \cdot \tau \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \pi &= g\tau^{-1}\sigma^{-1}g^{-1} \\ &= g\tau^{-1}g^{-1} \cdot g\sigma^{-1}g^{-1} \\ &= \tau' \cdot \sigma' \end{aligned}$$

en ayant posé

$$\tau' := g\tau^{-1}g^{-1} \qquad \text{et} \qquad \sigma' := g\sigma^{-1}g^{-1}.$$

Observons comment les conditions $\tau \in \mathrm{CS}(T)$ (invariance des colonnes) et $\sigma \in \mathrm{RS}(T)$ (invariance des lignes) se traduisent pour τ' et σ' :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathrm{RS}(T) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \sigma^{-1} \in \mathrm{RS}(T) \\ &\Longleftrightarrow \qquad g\sigma^{-1}g^{-1} = \sigma' \in \mathrm{RS}(g(T)), \end{aligned}$$

où le tableau $g(T)$ est défini de la même façon qu'à la note (2) p. 15 ; de même pour les colonnes, on trouve

$$\tau \in \mathrm{CS}(T) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g\tau^{-1}g^{-1} = \tau' \in \mathrm{CS}(g(T)),$$

en se rappelant que $\mathrm{CS}(T)$ et $\mathrm{RS}(T)$ possèdent une structure de groupe.

La formule devient alors en réécrivant l'ensemble $\{g \in \mathscr{S}_n \mid g = \pi \cdot g \cdot \sigma \cdot \tau\}$ à l'aide d'une somme :

$$\begin{aligned} \frac{n!\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)} &= \sum_{g \in \mathscr{S}_n} \sum_{\substack{\sigma' \in \mathrm{RS}(g(T)) \\ \tau' \in \mathrm{CS}(g(T))}} \varepsilon(\tau') \cdot \delta_{\pi = \tau'\sigma'} \\ &= \sum_{\substack{T' \text{ tableau} \\ \text{de forme } \lambda}} \sum_{\substack{\sigma \in \mathrm{RS}(T') \\ \tau \in \mathrm{CS}(T')}} \varepsilon(\tau) \cdot \delta_{\pi = \tau\sigma} \qquad \text{(en posant } T' = g(T)) \\ &= \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathscr{S}_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) \cdot \mathrm{Card}\{T \text{tableau de forme } \lambda \text{ tel que } \sigma \in \mathrm{RS}(T) \text{ et } \tau \in CS(T)\}. \end{aligned}$$

Si on pose

$$\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) := \mathrm{Card}\{T \text{ tableau de forme } \lambda \text{ tel que } \sigma \in RS(T) \text{ et } \tau \in CS(T)\}, \qquad (\dagger)$$

on a alors démontré :

Proposition 2.3.

Pour tout $\pi \in \mathscr{S}_n$, et toute partition λ de l'entier n,

$$\frac{n!\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma, \tau \in \mathscr{S}_n \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau)\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda). \qquad (2.1)$$

Remarque 2.4. Cette formule a l'inconvénient suivant : on somme sur $n!$ termes. Il est donc impossible de donner un exemple intéressant qui ne remplisse pas plusieurs pages et c'est difficile à exploiter théoriquement…
On va montrer, dans ce qui suit, que, dans certains cas, il est cependant possible de réduire significativement la taille de la somme.

1.2 Réduction de l'ensemble de sommation

Dans le cas où la permutation π possède beaucoup de points fixes, autrement dit si elle a un petit **support** (le support d'une permutation π étant l'ensemble $\{i : \pi(i) \neq i\}$), alors on va pouvoir réduire l'ensemble de sommation dans la formule précédente.

On travaillera désormais dans le cadre suivant : soit un entier $k \leq n$ et soit $\pi \in \mathscr{S}_k \subseteq \mathscr{S}_n$ (l'inclusion s'explique ainsi : on peut rajouter des points fixes à la permutation π pour en faire un élément de $\mathscr{S}_n$, *i.e.* on pose $\pi(i) = i$ pour tout $i > k$).

Notons que prendre une permutation dans $\mathscr{S}_k$ est une manière générique d'exploiter le fait qu'il y a un petit support. En effet, le caractère étant invariant par conjugaison, si une permutation possède un petit support, on va pouvoir se ramener au cas où tous ses points fixes sont sur les grandes valeurs (entiers entre $k+1$ et n pour un certain $k \leq n$), et la voir comme une permutation de $\mathscr{S}_k$, avec $k \leq n$.

Nous allons avoir besoin d'étendre la définition de $\widetilde{N}_{\sigma,\tau}$:

Définition 2.5.

Soient $\sigma, \tau \in \mathscr{S}_k$ et λ une partition de n.

$$\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) := \operatorname{Card}\left\{ \begin{array}{l} f : \{1,\dots,k\} \to \lambda \text{ injectives telles que} \\ (\star) \begin{array}{l} \bullet\ \forall i \in \{1,\dots,k\},\ f(i) \text{ et } f(\sigma(i)) \text{ sont dans la même ligne ;} \\ \bullet\ \forall i \in \{1,\dots,k\},\ f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ sont dans la même colonne.} \end{array} \end{array} \right\}$$

en considérant λ, dans cette définition de $\widetilde{N}$, comme un « ensemble de cases » (pour donner un sens à la notion de fonctions allant de l'ensemble $\{1,\dots,k\}$ dans l'ensemble λ).

Remarque 2.6.

- Cette définition est compatible avec la définition (†), qui correspond ici au cas $k = n$: f étant injective, elle est alors dans ce cas particulier bijective, ce qui correspond bien à un remplissage de λ, et donc à un tableau T de forme λ. La condition $(\star)$ devient alors $\sigma \in RS(T)$ et $\tau \in CS(T)$.
- Dans le cas où $k > n$, il n'y a aucune fonction f injective possible : on a alors simplement

$$\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = 0.$$

Avec cette définition de $\widetilde{N}$, nous pouvons énoncer le résultat principal de cette section :

Proposition 2.7.

Soient $\pi \in \mathcal{S}_k$ et λ une partition de l'entier n. Alors

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\chi^{\lambda}(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathcal{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda). \tag{2.2}$$

Remarque 2.8.

- On note bien que, outre le facteur multiplicatif $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, la différence avec (2.1), réside dans le fait qu'on a une somme sur les factorisations de π dans $\mathcal{S}_k$ et non dans $\mathcal{S}_n$.
- Notons aussi que l'on ne fait aucune hypothèse sur les entiers k et n. Cela est important dans la suite du cours. Si $k > n$, le caractère $\chi^{\lambda}(\pi)$ n'a pas de sens (on ne peut pas voir canoniquement $\pi \in \mathcal{S}_k$ comme une permutation de $\mathcal{S}_n$), mais comme le facteur $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ s'annule, on pose par convention

  $$n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\chi^{\lambda}(\pi)}{\dim(V_\lambda)} := 0.$$

  Le membre de droite de (2.2) est nul aussi si $k > n$ (en effet, on a alors $\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = 0$, d'après la remarque précédente). La formule est donc bien vérifiée pour $k > n$.

Démonstration. Le cas $k>n$ ayant été traité dans la remarque précédente, supposons $k \le n$ et choisissons $\pi \in \mathcal{S}_k$. Pour éviter les confusions, on notera dans cette preuve $\overline{\pi}$ son prolongement à $\mathcal{S}_n$.
L'équation (2.1) nous donne

$$\frac{n!\chi^{\lambda}(\overline{\pi})}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathcal{S}_n\\ \tau\sigma=\overline{\pi}}} \varepsilon(\tau)\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda).$$

On coupe la somme en deux : d'une part les termes où $\mathrm{Supp}(\sigma) \subseteq \{1,\ldots,k\}$ et de l'autre les termes où $\mathrm{Supp}(\sigma) \nsubseteq \{1,\ldots,k\}$.

- Termes où $\mathrm{Supp}(\sigma) \subseteq \{1,\ldots,k\}$ (remarquons déjà que ceci implique que l'on a aussi $\mathrm{Supp}(\tau) \subseteq \{1,\ldots,k\}$, du fait de la relation $\tau = \overline{\pi}\sigma^{-1}$).
  Soit $f : \{1,\ldots,n\} \to \lambda$ une fonction injective (c'est-à-dire un tableau de forme λ) vérifiant les conditions ($\star$) de la définition (2.5) où k est remplacé par n. Si l'on considère la restriction de f à l'ensemble $\{1,\ldots,k\}$, que l'on note

  $$\check{f} := f_{|\{1,\ldots,k\}},$$

  elle est encore injective et vérifie toujours les conditions ($\star$) (en se plaçant dans ce cas sur $\{1,\ldots,k\}$).
  D'autre part, si l'on considère la restriction de f à l'ensemble $\{k+1,\ldots,n\}$, que l'on note

  $$g := f_{|\{k+1,\ldots,n\}},$$

il s'agit d'une bijection de $\{k+1,\dots,n\}$ sur $\lambda\setminus\mathrm{Im}(\check{f})$. Remarquons que les conditions $(\star)$ ne fournissent *aucune condition* sur g. En effet, si $j \geq k+1$, dire que « $f(j)$ et $f(\sigma(j)) = f(j)$ sont dans la même ligne », est toujours vrai et n'ajoute pas de contrainte supplémentaire.

Réciproquement,

– si $\check{f} : \{1,\dots,k\} \to \lambda$ est une injection vérifiant les conditions $(\star)$,

– et si $g : \{k+1,\dots,n\} \to \lambda$ est bijective de $\{k+1,\dots,n\}$ dans $\lambda\setminus\mathrm{Im}(\check{f})$,

alors $\check{f} \sqcup g : \{1,\dots,n\} \to \lambda$ est bien une fonction injective vérifiant les conditions $(\star)$ (par définition $\check{f} \sqcup g(i) = \check{f}(i)$ si $i \leq k$ et $\check{f} \sqcup g(i) = g(i)$ si $i > k$).

Ainsi

$$\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = \widetilde{N}_{\sigma_{|\{1,\dots,k\}},\tau_{|\{1,\dots,k\}}}(\lambda)\cdot(n-k)!.$$

- Termes où $\mathrm{Supp}(\sigma) \not\subseteq \{1,\dots,k\}$.
  Autrement dit, il existe $i > k$ tel que $\sigma(i) = j \neq i$. Comme tous les termes de la somme vérifient $\tau\sigma = \overline{\pi}$, ceci implique

  $$\tau(j) = \tau\sigma(i) = \overline{\pi}(i) = i.$$

  Soit f vérifiant les conditions $(\star)$. Alors
  - $f(i)$ et $f\left(\sigma(i)\right) = f(j)$ sont dans la même ligne,
  - $f(j)$ et $f\left(\tau(j)\right) = f(i)$ sont dans la même colonne,

  par conséquent $f(i)$ et $f(j)$ sont dans la même case, ce qui implique que f n'est pas injective. Finalement, dans ce cas, on a

  $$\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = 0.$$

En réunissant les résultats précédents, il vient :

$$\frac{n!\chi^{\lambda}(\overline{\pi})}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_n \\ \tau\sigma=\overline{\pi} \\ \mathrm{Supp}(\sigma)\subseteq\{1,\dots,k\}}} \varepsilon(\tau)(n-k)!\widetilde{N}_{\sigma_{|\{1,\dots,k\}},\tau_{|\{1,\dots,k\}}}(\lambda)$$

soit, en posant $\check{\sigma} := \sigma_{|\{1,\dots,k\}}$ et $\check{\tau} := \tau_{|\{1,\dots,k\}}$,

$$\frac{n!}{(n-k)!}\frac{\chi^{\lambda}(\overline{\pi})}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\check{\sigma},\check{\tau}\in\mathscr{S}_k \\ \check{\tau}\check{\sigma}=\pi}} \varepsilon(\tau)\widetilde{N}_{\check{\sigma},\check{\tau}}(\lambda),$$

ce qui termine la preuve. □

Illustrons notre nouvelle formule sur un exemple.

Exemple 2.9. Prenons $\pi = (1\ 2) \in S_2$ et λ une partition de n.

- Cas où $\tau = \mathrm{id}$ et $\sigma = (1\ 2)$; $f(1)$ et $f(2)$ doivent se trouver dans la même ligne, disons la i-ième de λ : d'où λ_i (nombre de cases de la i-ème ligne de λ) choix possibles pour placer $f(1)$ et $\lambda_i - 1$ choix possibles pour placer $f(2)$ (une fois

$f(1)$ placé). Si l est le nombre de lignes de λ, il vient donc :

$$\widetilde{N}_{(1\ 2),\mathrm{id}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(\lambda_i - 1).$$

- Cas où $\tau = (1\ 2)$ et $\sigma = \mathrm{id}$; de la même façon, si l' est le nombre de colonnes de λ et λ'_i le nombre de cases de la i-ème colonne de λ,

$$\widetilde{N}_{\mathrm{id},(1\ 2)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{l'} \lambda'_i(\lambda'_i - 1).$$

Le théorème nous donne alors

$$\begin{aligned} n(n-1)\frac{\chi^\lambda((1\ 2))}{\dim(V_\lambda)} &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(\lambda_i - 1) - \sum_{i=1}^{l'} \lambda'_i(\lambda'_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 - n - \sum_{i=1}^{l'} {\lambda'_i}^2 + n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 - \sum_{i=1}^{l'} {\lambda'_i}^2. \end{aligned}$$

Remarque 2.10. L'exemple ci-dessus donne le caractère sur une transposition de *toutes* les représentations irréductibles de *tous* les groupes symétriques. Bien qu'il ne s'agisse que d'un cas simple d'application du théorème, c'est donc déjà un résultat intéressant.

Signalons que le résultat de cet exemple était déjà connu : on peut l'obtenir à l'aide de fonctions symétriques, voir [Mac 95, Section I.7, example 7].

1.3 Oublier l'injectivité

La condition d'injectivité dans la définition de $\widetilde{N}$ complique certaines applications, nous allons voir que nous pouvons l'oublier.

Définition 2.11.

Soient $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_k$ et λ une partition de n. On définit alors

$$N_{\sigma,\tau}(\lambda) := \mathrm{Card}\left\{ \begin{array}{l} f : \{1,\dots,k\} \to \lambda \text{ telles que} \\ (\star) \begin{array}{l} \bullet\ \forall i \in \{1,\dots,k\},\ f(i) \text{ et } f(\sigma(i)) \text{ sont dans la même ligne ;} \\ \bullet\ \forall i \in \{1,\dots,k\},\ f(i) \text{ et } f(\tau(i)) \text{ sont dans la même colonne.} \end{array} \end{array} \right\}$$

(λ étant encore considéré, dans cette nouvelle définition, comme un « ensemble de cases »).

Exemple 2.12. On a alors

$$N_{(1\ 2),\mathrm{id}}(\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^2 \qquad \text{et} \qquad N_{\mathrm{id},(1\ 2)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{l'} {\lambda'_i}^2.$$

D'après le calcul de l'exemple 2.9, on a alors

$$n(n-1)\frac{\chi^{\lambda}((1\ 2))}{\dim(V_\lambda)} = N_{(1\ 2),\mathrm{id}}(\lambda) - N_{\mathrm{id},(1\ 2)}(\lambda).$$

Pour $\pi = (1\ 2)$, la proposition 2.7 reste donc vraie en remplaçant $\widetilde{N}$ par N. Le théorème suivant affirme que cela fonctionne en général.

Théorème 2.13. Soient $\pi \in \mathscr{S}_k$ et λ une partition de l'entier n. Alors

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\chi^{\lambda}(\pi)}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda).$$

Démonstration. On veut montrer que :

$$\sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\widetilde{N}_{\sigma,\tau}(\lambda) = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda).$$

Or, le membre de gauche peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{\substack{f:\{1,\ldots,k\}\to\lambda\\ f \text{ injective}}} \Bigg(\sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\delta_{\{f,\tau,\sigma \text{ vérifient } (\star)\}} \Bigg),$$

tandis que le membre de droite est égal à la même somme, sans la condition d'injectivité :

$$\sum_{f:\{1,\ldots,k\}\to\lambda} \Bigg(\sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\delta_{\{f,\tau,\sigma \text{ vérifient } (\star)\}} \Bigg).$$

Il suffit donc de montrer que si f est non injective, alors

$$\sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)\delta_{\{f,\tau,\sigma \text{ vérifient } (\star)\}} = 0.$$

Soient donc $f : \{1,\ldots,k\} \to \lambda$, et $i \neq j$ tels que $f(i) = f(j)$. On remarque que si σ et τ vérifient les conditions $(\star)$ et si $\tau\sigma = \pi$, c'est équivalent à ce que $\sigma' = (i\ j)\circ\sigma$ et $\tau' = \tau\circ(i\ j)$ vérifient les conditions $(\star)$ et que $\tau'\sigma' = \pi$ (ici, la fonction f est fixée). Or, (τ,σ) et (τ',σ') participent à cette somme avec des signes différents (car on a alors $\varepsilon(\tau) = -\varepsilon(\tau')$) : l'existence de cette *involution changeant les signes* implique que la somme est nulle car ses termes s'annulent deux à deux. □

Remarque 2.14. La formule de ce théorème justifie l'appellation d'approche « duale », le caractère étant vu, dans le membre de droite, comme une fonction de λ.

2 Fonctions $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$

2.1 Cas rectangulaire

Commençons par regarder le cas où λ est **rectangulaire**, *i.e.* :

$$\lambda = p \times q := (\underbrace{q,\ldots,q}_{p \text{ fois}}) = \underbrace{\left.\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \cdots & \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline & \cdots & \\ \hline \end{array}\right\} p \text{ lignes}}_{q \text{ colonnes}}$$

Dans ce cas on a (ici, $|C(\pi)|$ désigne le nombre de cycles de la permutation π) :

Lemme 2.15.

$$N_{\sigma,\tau}(\lambda) = p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|}.$$

Démonstration. Fixons σ et τ dans $\mathscr{S}_k$. Pour calculer $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$, on compte toutes les fonctions $f : \{1,\ldots,k\} \to \lambda$ qui vérifient les conditions $(\star)$. À partir d'une de ces fonctions f, on peut définir deux fonctions :

- la fonction h_r, définie par (en notant $R(\lambda)$ l'ensemble des lignes de λ)

$$h_r : \begin{cases} C(\sigma) \to & R(\lambda) \\ \quad c \quad \mapsto \mathrm{ligne}(f(i)) & \text{où} \quad i \in c \text{ (quelconque)}\,; \end{cases}$$

  on remarque que cette fonction est bien définie puisque la condition $(\star)$ implique que si deux éléments sont pris dans le même cycle, ils sont envoyés dans la même ligne.
- la fonction h_c, définie par (en notant $\mathrm{Col}(\lambda)$ l'ensemble des colonnes de λ)

$$h_c : \begin{cases} C(\tau) \to & \mathrm{Col}(\lambda) \\ \quad c \quad \mapsto \mathrm{colonne}(f(i)) & \text{où} \quad i \in c \text{ (quelconque)}, \end{cases}$$

  avec une remarque similaire concernant le bien-fondé de sa définition.

Réciproquement, pour tout couple de fonctions (h_r, h_c) défini comme ci-dessus, on peut définir

$$f(i) := \big(h_r(c_1), h_c(c_2)\big)$$

où $(h_r(c_1), h_c(c_2))$ est une case du diagramme (donnée sous la forme d'un couple ligne, colonne), avec c_1 le cycle de σ contenant i et c_2 le cycle de τ contenant i.
On a donc une bijection entre ces deux espaces de fonctions et par conséquent

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}\left\{ \begin{array}{c} f : \{1,\ldots,k\} \to \lambda, \\ f \text{ vérifiant } (\star) \end{array} \right\} &= \mathrm{Card}\left\{ \big(h_r, h_c\big),\ h_r : C(\sigma) \to R(\lambda),\ h_c : C(\tau) \to \mathrm{Col}(\lambda) \right\} \\ &= \mathrm{Card}\left\{ h_r : C(\sigma) \to R(\lambda) \right\} \cdot \mathrm{Card}\left\{ h_c : C(\tau) \to \mathrm{Col}(\lambda) \right\} \\ &= p^{|C(\sigma)|} q^{|C(\tau)|}. \end{aligned}$$

□

Par conséquent, on sait calculer les caractères sur les diagrammes rectangulaires : on retrouve le résultat suivant, dû à Stanley.

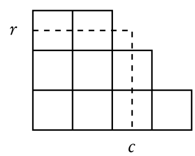
Corollaire 2.16 (Stanley, 2003). Soient π une permutation de S_k et $p \times q$ une partition rectangulaire de $n = pq$. On a alors

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\chi^{p\times q}(\pi)}{\dim(V^{p\times q})} = \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\pi}} \varepsilon(\tau)p^{|C(\sigma)|}q^{|C(\tau)|}$$

Remarque 2.17. La quantité $\dim(V^{p\times q})$ étant complètement explicite (*cf.* formule des équerres [Sag 01, Theorem 3.10.2]), la formule nous permet bien de calculer le caractère correspondant.

2.2 Cas général

Si l'on observe la preuve du lemme 2.15, l'hypothèse que le diagramme est rectangulaire apparaît dans la deuxième partie de cette preuve, au moment ou l'on souhaite reconstituer f à partir du couple (h_r, h_c) : si λ n'est pas rectangulaire, certaines couples (r, c) ne sont pas les coordonnées d'une case du diagramme λ, bien que r et c soient respectivement une ligne et une colonne du diagramme. Ce phénomène est illustré sur le schéma suivant.



Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 2.18.

Un couple (h_r, h_c) vérifie $(\star)_h$ si

$$\forall i, \quad (h_r(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda, \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} c_1 \in C(\sigma),\ i \in c_1 \\ c_2 \in C(\tau),\ i \in c_2, \end{array}$$

ou, de manière équivalente, si

$$c_1 \in C(\sigma),\ c_2 \in C(\tau),\ c_1 \cap c_2 \neq \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad (h_r(c_1), h_c(c_2)) \in \lambda.$$

Le lemme 2.15 devient alors :

Lemme 2.19.

$$N_{\sigma,\tau}(\lambda) = \mathrm{Card}\left\{ (h_r, h_c), \text{ tel que } (h_r, h_c) \text{ vérifie } (\star)_h \right\}.$$

Démonstration. Similaire à celle du lemme 2.15. □

Définition 2.20.

Soit $\sigma, \tau \in \mathscr{S}_k$. On définit, et on note $G_{\sigma,\tau}$, le **graphe biparti**[a] défini par l'ensemble de sommets V suivant :

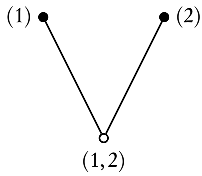
$$V := V_\circ \sqcup V_\bullet, \text{ où } V_\circ = C(\sigma) \text{ et } V_\bullet = C(\tau)$$

et par l'ensemble d'arêtes $E_{G_{\sigma,\tau}}$ défini par : pour tout $c_1 \in C(\sigma)$ et $c_2 \in C(\tau)$,

$$(c_1, c_2) \in E_{G_{\sigma,\tau}} \iff c_1 \cap c_2 \neq \varnothing.$$

(*a*) Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets V est divisé en deux parties $V_\circ \sqcup V_\bullet$ et où chaque arête a une extrémité dans $V_\circ$ et une dans $V_\bullet$.

Exemple 2.21. Avec $\sigma = (1\ 2)$ et $\tau = (1)(2)$, on a le graphe suivant :



2.3 Fonctions indexées par des graphes

Corollaire 2.22 (du lemme 2.19). $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$ ne dépend que de $G_{\sigma,\tau}$.

Par conséquent, on pourra par la suite noter $N_G(\lambda)$ aussi bien que $N_{\sigma,\tau}(\lambda)$ si $G = G_{\sigma,\tau}$. Pour le confort du lecteur, donnons explicitement la définition de $N_G(\lambda)$. Avec cette définition, $N_{\sigma,\tau}(\lambda) = N_{G_{\sigma,\tau}}(\lambda)$.

Définition 2.23.

Soient G un graphe biparti et λ un diagramme de Young. Alors $N_G(\lambda)$ est le nombre de couples $h = (h_r, h_c)$ tels que

- h_r est une fonction de $V_\circ(G)$ dans $R(\lambda)$;
- h_c est une fonction de $V_\bullet(G)$ dans $\mathrm{Col}(\lambda)$;
- S'il y a une arête entre $v_\circ \in V_\circ(G)$ et $v_\bullet \in V_\bullet(G)$ alors

$$(h_r(v_\circ), h_c(v_\bullet)) \in \lambda.$$

Exemple 2.24. Voici les fonctions N indexées par les graphes à 2 et 3 sommets :

$$N(\lambda) = |\lambda|, \quad N(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i^2, \quad N = \sum_{i=1}^{\lambda_1} (\lambda_i')^2.$$

Remarque 2.25. À un diagramme de Young λ, on peut naturellement associer un graphe biparti B_λ de la manière suivante :

- les sommets blancs sont les lignes de λ ;
- les sommets noirs sont les colonnes de λ ;
- les arêtes sont les cases de λ (une arête relie la ligne de la case correspondante à sa colonne).

Avec ce point de vue, $N_G(\lambda)$ peut s'interpréter comme le nombre de morphismes de graphes bipartis[(a)] de G dans B_λ.

(*a*) On appelle ici *morphisme de graphes bipartis* de G dans H une application envoyant les sommets blancs (resp. sommets noirs et arêtes) de G sur les sommets blancs (resp. sommets noirs et arêtes) de H en préservant la relation d'incidence entre sommets et arêtes.

La propriété suivante est facile et indique comment multiplier les N_G.

Proposition 2.26.

Soient G et G' deux graphes bipartis. Alors, pour tout diagramme λ,

$$N_G(\lambda) \cdot N_{G'}(\lambda) = N_{G \sqcup G'}(\lambda),$$

où $G \sqcup G'$ est l'union disjointe des graphes G et G'.

2.4 Coordonnées multi-rectangulaires

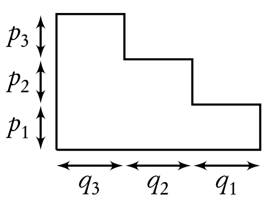
Comme le calcul est assez facile dans le cas rectangulaire, une idée, due à R. Stanley, est de considérer les diagrammes comme une superposition de rectangles.

Définition 2.27.

Soient deux listes d'entiers strictement positifs $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ et $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ de même longueur. On considère alors le diagramme suivant, appelé **diagramme multi-rectangulaire** et noté $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$:

$$\Big(\underbrace{q_1 + \cdots + q_m, \ldots, q_1 + \cdots + q_m}_{p_1 \text{ fois}}, \cdots, \underbrace{q_{m-1} + q_m, \ldots, q_{m-1} + q_m}_{p_{m-1} \text{ fois}}, \underbrace{q_m, \ldots, q_m}_{p_m \text{ fois}}\Big)$$

Cette définition est plus facile à comprendre sur une figure. Voici la représentation graphique du diagramme multi-rectangulaire correspondant à deux listes $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ de longueur 3.



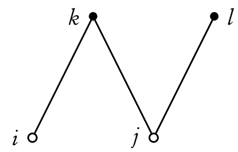
Remarque 2.28. Le cas rectangulaire correspond au cas $m = 1$. Tout diagramme peut s'écrire comme diagramme multi-rectangulaire $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, si l'on ne fixe pas de condition sur m.

Rappelons que dans le cas rectangulaire $N_G(p \times q) = p^{|V_\circ|} q^{|V_\bullet|}$; nous allons voir ce que devient cette formule dans le cas général. Il nous faut pour cela définir la notion de fonction croissante sur un graphe biparti :

Définition 2.29.

Soient G un graphe biparti et φ une fonction de l'ensemble $V_G = V_\circ \sqcup V_\bullet$ des sommets de G dans $\mathbb{N}^*$. Alors φ est dite **croissante** si l'image d'un sommet blanc (*i.e.* de $V_\circ$) est toujours inférieure à l'image de ses voisins noirs (i.e. de $V_\bullet$).

Exemple 2.30. Considérons le graphe (non-étiqueté) et la fonction $\varphi : V_G \to \mathbb{N}^*$ suivante.



Le graphe est non-étiqueté, i, j, k et l ne sont donc pas des étiquettes, mais les entiers naturels associés par φ aux différents sommets. Par définition φ est croissante si $i \leq k$, $j \leq k$ et $j \leq l$.

Proposition 2.31.

Pour tout graphe biparti G, l'évaluation de la fonction N_G sur un diagramme multi-rectangulaire $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est donnée par

$$N_G(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_{\substack{\varphi: V_G \to \mathbb{N}^* \\ \varphi \text{ croissante}}} \prod_{\circ \in V_\circ} p_{\varphi(\circ)} \prod_{\bullet \in V_\bullet} q_{\varphi(\bullet)}.$$

Exemple 2.32. Pour le graphe de l'exemple 2.30, on a

$$N_G(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_{\substack{i,j \leq k \\ j \leq l}} p_i p_j q_k q_l.$$

Démonstration. On part du lemme 2.19 : $N_G(\mathbf{p}\times\mathbf{q})$ est le nombre de couples $h = (h_r, h_c)$ vérifiant $(\star)_h$. À un couple (h_r, h_c) (vérifiant ou non $(\star)_h$), on associe une fonction $\varphi : V_G \to \mathbb{N}^*$ de la manière suivante :

- si v est un sommet blanc ($v \in V_\circ$),

$$\varphi(v) = i \text{ si } p_1 + \cdots + p_{i-1} < h_r(v) \leq p_1 + \cdots + p_i.$$

- De manière similaire, si v est un sommet noir ($v \in V_\bullet$),

$$\varphi(v) = j \text{ si } q_1 + \cdots + q_{j-1} < h_c(v) \leq q_1 + \cdots + q_j.$$

Intuitivement on regarde dans quel bloc (selon la décomposition du diagramme en superposition de rectangles) est la ligne $h_r(v)$ (ou la colonne $h_c(v)$).
Il est facile de voir que $h = (h_r, h_c)$ vérifie $(\star)_h$ si et seulement si la fonction φ est croissante. Cela vient du fait que le diagramme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ est la réunion de rectangles de tailles $p_i \times q_j$ pour $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{j} \leq m$. Par ailleurs, le nombre de pré-images d'une fonction φ fixée est

$$\prod_{\circ \in V_\circ} p_{\varphi(\circ)} \prod_{\bullet \in V_\bullet} q_{\varphi(\bullet)}.$$

Ces deux remarques finissent la démonstration. $\square$

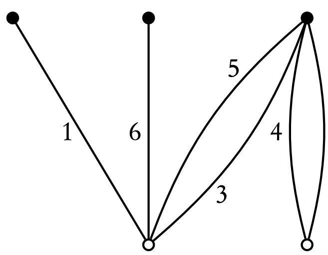
3 Cartes

3.1 Définition

D'une façon intuitive, les cartes sont des graphes dessinés sur des surfaces. On considère des multigraphes (*i.e.* plusieurs arêtes distinctes sont possibles entre deux sommets) bipartis dont les k arêtes sont étiquetées par tous les nombres de 1 à k de manière bijective. On peut encoder ces graphes par les données suivantes

$$V = V_\circ \sqcup V_\bullet, \qquad E = \{1, \ldots, k\}, \qquad E \to V_\circ \times V_\bullet.$$

Exemple 2.33.



Sur ces graphes, nous allons ajouter une structure supplémentaire :

Définition 2.34.

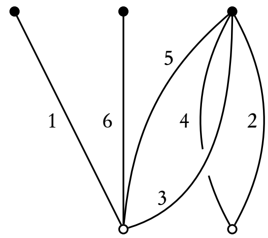
Un **système de rotation** pour un graphe G est la donnée, pour chaque sommet, d'un ordre cyclique[a] sur les arêtes arrivant à ce sommet.

(*a*) Un ordre cyclique est un ordre total à rotation cyclique près. Par exemple, l'ordre cyclique $1 < 3 < 5 < 6$ est le même que $3 < 5 < 6 < 1$. On note généralement les ordres comme des mots, par exemple $(1\,3\,5\,6)$.

Exemple 2.35. Pour le graphe G défini dans l'exemple ci-dessus (exemple 2.33), si on appelle a le sommet $\circ$ possédant quatre arêtes et b le sommet $\bullet$ possédant aussi quatre arêtes, on peut, par exemple, assigner à a l'ordre cyclique $(1\,3\,5\,6)$ et à b l'ordre cyclique $(2\,5\,4\,3)$. Pour les autres sommets qui sont de degré 1 ou 2, il n'y a qu'un ordre cyclique possible.

On peut représenter à la fois le graphe et son système de rotation sur une figure (en se souvenant que le plan peut être orienté, par exemple dans le sens trigonométrique) : pour cela, on dessine les arêtes de manière à ce que, autour de chaque sommet, les arêtes soient dans l'ordre cyclique que l'on s'est fixé. Cela peut forcer à ajouter des croisements d'arêtes artificiels, même quand le graphe (sans son système de rotation) est planaire.

Exemple 2.36. On reprend le graphe de l'exemple 2.33, muni du système de rotation de l'exemple 2.35. Voici sa représentation graphique.



Remarque 2.37. Lorsque l'on a un graphe dessiné sur une surface, on a naturellement un système de rotation : on a en fait même une équivalence (avec quelques conditions techniques additionnelles) entre

$$\{\text{ graphes + système de rotation }\}$$

et

$$\{\text{ graphes dessinés sur des surfaces orientées à isomorphisme près }\}.$$

Si l'on considère uniquement les objets connexes dans l'un de ces ensembles, on obtient ce que l'on appelle une **carte**.

Récapitulons :

Définition 2.38.

Une carte est un graphe connexe muni d'un système de rotation.

Ceci est la définition combinatoire de la notion de carte. Comme cela est évoqué dans la remarque ci-dessus, il existe une définition équivalente topologique de la notion de carte, dont on ne se servira pas ici.

3.2 Cartes et couples de permutations

La notion de carte est intéressante pour nous à cause du résultat suivant.

Proposition 2.39.

Il existe une bijection entre $\mathscr{S}_k \times \mathscr{S}_k$ et l'ensemble

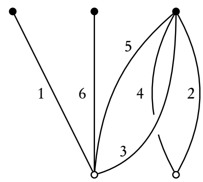
$$\{\text{ graphes bipartis à } k \text{ arêtes étiquetées + système de rotation }\}.$$

On notera $M_{\sigma,\tau}$ l'image du couple de permutations (σ, τ) par cette bijection.

Remarque 2.40. Attention, on gardera à l'esprit que les graphes considérés ici ne sont pas forcément connexes !

En guise de démonstration, nous allons décrire cette bijection sur un exemple.

Exemple 2.41. Partons du graphe et du système de rotation ci après.



Nous allons lui associer un élément $(\sigma,\tau)\in\mathscr{S}_6\times\mathscr{S}_6$ de la façon suivante : à chaque sommet blanc correspond un cycle de la permutation σ (en listant les étiquettes des arêtes incidentes dans l'ordre trigonométrique : ici (1 3 5 6) pour le sommet blanc de degré 4 et (2 4) pour l'autre) et, de la même façon, à chaque sommet noir correspond un cycle de la permutation τ (ici (1), (6) et (2 5 4 3)), soit

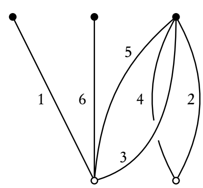
$$\sigma=(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4) \qquad \text{et} \qquad \tau=(1)(6)(2\ 5\ 4\ 3).$$

Réciproquement, voici comment reconstituer le graphe et le système de rotation : premièrement, on place un sommet blanc pour chaque cycle de σ, un sommet noir pour chaque cycle de τ ; on place ensuite une arête étiquetée 1 entre les deux sommets correspondant aux cycles contenant 1, une arête étiquetée 2 entre les deux sommets correspondant aux cycles contenant 2, etc., ce qui permet de reconstituer le graphe en lui-même. Enfin, l'ordre des cycles des permutations nous donne le système de rotation.

Notre formule pour les caractères irréductibles du groupe symétrique (Théorème 2.13) fait intervenir des couples de permutations (σ,τ) dans l'ensemble de sommation. Ces couples sont filtrés selon le produit $\tau\sigma$ et le terme correspondant dans la somme dépend uniquement du graphe $G_{\sigma,\tau}$ introduit dans la définition 2.20.

Nous allons voir que ces deux informations se lisent aisément sur $M_{\sigma,\tau}$, ce qui fait de cette représentation un bon outil dans notre contexte. D'une part, le graphe $G_{\sigma,\tau}$ est le **graphe sous-jacent** de $M_{\sigma,\tau}$ (*i.e.* obtenu en oubliant le système de rotation et en supprimant les arêtes multiples). D'autre part, nous allons voir sur un exemple comment lire le produit $\tau\sigma$ sur $M_{\sigma,\tau}$.

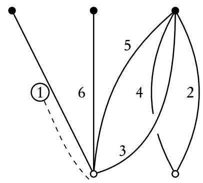
Exemple 2.42. Reprenons l'exemple précédent où l'on avait $\sigma=(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$ et $\tau=(1)(6)(2\ 5\ 4\ 3)$. Voici le graphe $M_{\sigma,\tau}$, muni de son système de rotation, qui leur est associé.



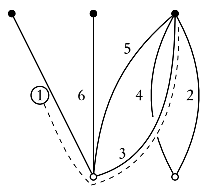
Nous allons pouvoir donner la décomposition en cycles de $\tau\sigma$. Attention, pour cette construction, il est important d'écrire les étiquettes à gauche des arêtes en allant de l'extrémité blanche vers l'extrémité noire, comme cela a été fait ci-dessus. On commence par fixer arbitrairement le premier élément du premier cycle, et l'on choisira par exemple 1 :

$$\tau\sigma = (1$$

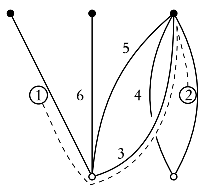
ensuite on parcourt, dans le sens trigonométrique, l'arête du graphe correspondant à l'étiquette 1 jusqu'à rencontrer un sommet :



mais comme on a un ordre cyclique (des étiquettes) autour de chaque sommet, on a un choix naturel pour continuer son chemin (ici l'arête d'étiquette 3, car 3 succède à 1 dans l'ordre autour de leur extrémité blanche commune),

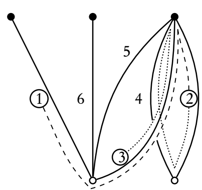


À nouveau, l'ordre cyclique nous indique quel embranchement suivre, et on arrive au numéro 2 que l'on note dans le produit $\tau\sigma$:

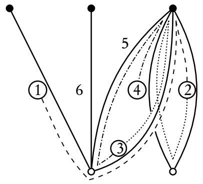


$$\longmapsto \qquad \tau\sigma = (1\ 2$$

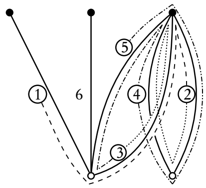
En continuant de la même façon (on ajoute un numéro au produit $\tau\sigma$ uniquement lorsque l'on passe du bon côté de l'arête, c'est-à-dire que l'on parcourt l'arête de son extrémité noire vers son extrémité blanche),



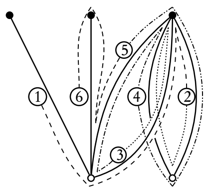
$$\longmapsto \qquad \tau\sigma = (1\ 2\ 3$$



$\longmapsto \qquad \tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4$



$\longmapsto \qquad \tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5$



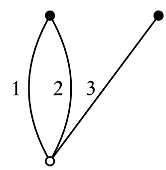
$\longmapsto \qquad \tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6$

et finalement, il vient :

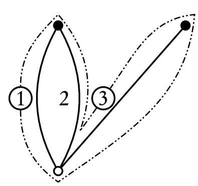
$$\tau\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6).$$

Donnons un autre exemple pour voir ce qu'il se passe quand il y a plusieurs cycles.

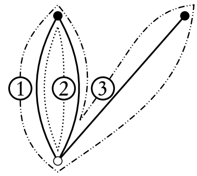
Exemple 2.43. Si on avait pris l'exemple



en partant du 1, on aurait croisé le 3 puis on serait revenu au numéro 1 :



ce qui nous aurait donné premièrement le cycle (1 3) ; pour voir les autres cycles il faut ensuite partir d'un point non encore sélectionné (ici le seul choix est 2) et recommencer (on retombe, dans notre cas, sur 2) :



Dans cet exemple, on a donc :

$$\tau\sigma = (1\ 3)(2).$$

Quand le produit $\tau\sigma$ a un unique cycle, c'est-à-dire que l'on fait le tour de toutes les arêtes du graphe en une seule fois (cela implique en particulier que le graphe est connexe), on dit que la carte est **unicellulaire**.

Si de plus, on se fixe $\tau\sigma = (1\ \cdots\ k)$, les étiquettes de toutes les arêtes peuvent être retrouvées à partir de l'arête étiquetée 1 (en appliquant la procédure ci-dessus).

Par conséquent, nous avons le résultat suivant

Proposition 2.44.

L'ensemble

$$\{\sigma, \tau \in \mathscr{S}_k,\ \tau\sigma = (1\ \cdots\ k)\}$$

est en bijection avec l'ensemble

$$\{\text{cartes biparties unicellulaires enracinées (\textit{i.e.} une arête est marquée) à } k \text{ arêtes}\}.$$

Notes et références

De manière surprenante, bien que la construction du symétriseur de Young soit relativement ancienne, elle n'avait à ma connaissance pas été utilisée pour calculer les caractères (l'approche habituelle est d'exploiter le lien avec les fonctions symétriques, *cf.* [Mac 95, Section I,7]).

La formule démontrée dans la première section a été conjecturée par R. Stanley [Sta 06] sous une forme un peu différente (utilisant les coordonnées multi-rectangulaires, qu'il a introduites dans son article [Sta 03]). Elle a été démontrée par l'auteur dans l'article [Fér 10]. La démonstration présentée ici est un travail joint avec P. Śniady, *cf.* [FŚ 11a].

Cette formule est intéressante car elle fait intervenir différents objets classiques en combinatoire. Les fonctions *croissantes* sur des graphes bipartis (ou plus généralement orientés), et en particulier leur série génératrice, ont été étudiées sous le nom de P-partitions par R. Stanley dans sa thèse [Sta 72]. La différence est qu'ici, il est naturel de regarder des séries en deux ensembles de variables ($\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$) alors que R. Stanley considère des séries en un ensemble de variables.

Quant aux cartes, ce sont des objets omniprésents en combinatoire énumérative. Un ouvrage de référence sur le sujet est le livre de S. Lando et A. Zvonkin [LZ 04]. Les caractères du groupe symétrique y apparaissent, dans l'appendice de D. Zagier, comme outil pour compter des cartes avec les degrés des sommets fixés (voir aussi [Jac 88]). Pourtant, cela ne semble pas relié à notre formule qui, au contraire, exprime les caractères du groupe symétrique comme une somme sur des cartes.

Chapitre 3

Polynômes de Kerov

Dans ce chapitre, nous regardons un problème posé par S. Kerov, que les outils combinatoires présentés ici ont permis de résoudre. Il s'agit de prouver la positivité des coefficients de certains polynômes définis à partir de caractères normalisés.

1 Rappels et caractères normalisés

- Une représentation d'un groupe fini G est un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Les représentations irréductibles de $\mathscr{S}_n$ sont canoniquement indexées par les partitions λ de l'entier n (noté $\lambda \vdash n$).
- Pour une partition λ de l'entier n, on s'intéresse au caractère χ^λ de la représentation irréductible ρ^λ associée à λ, défini par :

$$\chi^\lambda : \begin{cases} \mathscr{S}_n \to & \mathbb{C} \\ \pi \mapsto & \mathrm{Tr}\left(\rho^\lambda(\pi)\right). \end{cases}$$

  Le quotient $\frac{\chi^\lambda(\pi)}{\dim(V_\lambda)}$ apparaît souvent ici, nous le noterons donc $\hat{\chi}^\lambda(\pi)$, et l'appellerons le **caractère normalisé**
- Le caractère est une fonction centrale : pour $\pi \in \mathscr{S}_n$, $\chi^\lambda(\pi)$ ne dépend que de la classe de conjugaison de la permutation π, c'est-à-dire du type cyclique de π.
- Le théorème 2.13 donne une expression combinatoire du caractère normalisé : soient $\pi \in \mathscr{S}_k$ et λ une partition de n

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)\hat{\chi}^\lambda(\pi) = \sum_{\substack{\sigma,\tau \in \mathscr{S}_k \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}(\lambda),$$

  avec la convention que le membre de gauche est nul si $k > n$.

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition 3.1.

Soit μ une partition d'un entier k. Choisissons $\pi \in \mathcal{S}_k$ de type cyclique μ. On pose alors, pour toute partition λ,

$$\mathrm{Ch}_\mu(\lambda) := \begin{cases} |\lambda|(|\lambda|-1)\cdots(|\lambda|-k+1)\hat{\chi}^\lambda(\pi) & \text{si} \quad k \leq |\lambda|; \\ 0 & \text{si} \quad k > |\lambda|. \end{cases}$$

Remarque 3.2.

- Comme χ^λ est une fonction centrale, le membre de droite ne dépend pas du choix de π et Ch_μ est bien définie.
- Ch_μ est bien une fonction sur l'ensemble de ***tous*** les diagrammes de Young de toutes les tailles : pour μ fixée, on peut prendre n'importe quelle partition λ. Pour mettre cela en valeur, nous allons utiliser désormais $|\lambda|$ à la place de n (qui n'est plus considéré comme un entier fixé).

Les objets $N_{\sigma,\tau}$ et N_G, introduits respectivement dans les définitions 2.11 et 2.23, étant aussi des fonctions sur tous les diagrammes de Young, le théorème 2.13 peut alors se lire comme une égalité entre deux fonctions sur *tous les diagrammes de Young* : si π est une permutation de $\mathcal{S}_k$ de type cyclique μ,

$$\mathrm{Ch}_\mu = \sum_{\substack{\tau,\sigma \in \mathcal{S}_k \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}.$$

2 Quelques propriétés de vect(Ch_μ)

Les fonctions Ch_μ engendrent linéairement un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions sur les diagrammes de Young. Ce sous-espace est appelé espace des **fonctions polynomiales** et noté Λ. Nous allons voir quelques propriétés de Λ.

2.1 Stabilité de Λ par multiplication

Dans cette section, nous allons prouver que Λ est une algèbre, c'est-à-dire qu'elle est stable par multiplication. En fait, on a même le résultat un peu plus fort suivant :

Proposition 3.3.

Soient deux partitions μ_1 et μ_2 (non nécessairement de même taille). Alors $\mathrm{Ch}_{\mu_1} \cdot \mathrm{Ch}_{\mu_2}$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients entiers (positifs) de $(\mathrm{Ch}_\nu)_{\nu \text{ partition}}$, où les partitions ν sont de taille quelconque.

Démonstration. Nous allons prouver ce résultat sur un exemple, en prenant

$$\mu_1 = \mu_2 = (2).$$

On regarde donc le carré $\mathrm{Ch}_{(2)}^2$, où $\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda) = |\lambda|(|\lambda|-1)\hat{\chi}^\lambda\big((1\ 2)\big)$.

On rappelle que :

$$\chi^\lambda\big((1\,2)\big) = \mathrm{Tr}\left[\rho^\lambda\big((1\,2)\big)\right].$$

Il est naturel de se poser la question de la multiplicativité du caractère ; or, si ρ^λ est bien multiplicatif, ce n'est pas le cas de la trace, et finalement, d'une manière générale,

$$\chi^\lambda(g\cdot g') \neq \chi^\lambda(g)\cdot\chi^\lambda(g').$$

On a cependant le résultat suivant, dont la preuve est une application directe du Lemme de Schur [Sag 01, Lemma 1.7].

Lemme 3.4. Si $x\in\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$ est central (*i.e.* $\forall\sigma\in\mathscr{S}_n$, $e_\sigma\cdot x = x\cdot e_\sigma$, ou, de manière équivalente, en écrivant $x=\sum_{\tau\in\mathscr{S}_n}\alpha_\tau e_\tau$, si α_τ dépend uniquement du type cyclique de τ), alors $\rho^\lambda(x)$ est une homothétie : plus précisément

$$\rho^\lambda(x) = \hat\chi^\lambda(x)\,\mathrm{Id}_{V_\lambda}.$$

Corollaire 3.5. Soient $x,y\in\mathbb{C}[\mathscr{S}_n]$. Si x est central, alors

$$\hat\chi^\lambda(x\cdot y) = \hat\chi^\lambda(x)\cdot\hat\chi^\lambda(y).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\chi^\lambda(x\cdot y) = \mathrm{Tr}\left(\rho^\lambda(x\cdot y)\right) &= \mathrm{Tr}\left(\rho^\lambda(x)\cdot\rho^\lambda(y)\right) && (\rho^\lambda \text{ multiplicatif})\\ &= \mathrm{Tr}\left(\hat\chi^\lambda(x)\cdot\rho^\lambda(y)\right)\\ &= \hat\chi^\lambda(x)\cdot\chi^\lambda(y). && \square\end{aligned}$$

Revenons à la preuve de la proposition 3.3. Pour exploiter le corollaire ci-dessus, l'idée est d'exprimer $\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)$ comme le caractère d'un élément central, divisé par la dimension de la représentation.

Il y a une façon naturelle de faire ça en remarquant que

$$\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda) = \hat\chi^\lambda\Big(\sum_{\substack{1\le i,j\le|\lambda|\\ i\neq j}} (i\ j)\Big)\,;$$

il y a $|\lambda|(|\lambda|-1)$ termes dans la somme et, comme le caractère est une fonction stable par conjugaison, chacun de ces termes a pour caractère normalisé $\hat\chi^\lambda\big((1\,2)\big)$.

Remarque 3.6. Toutes les fonctions $\mathrm{Ch}_\mu(\lambda)$ possèdent une écriture semblable.

Par exemple, pour $\mu=(2,2)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_{(2,2)}(\lambda) &= \hat\chi^\lambda\left(\sum_{\substack{1\le i,j,k,l\le|\lambda|\\ i,j,k,l \text{ distincts}}}(i\ j)(k\ l)\right)\\ &= |\lambda|(|\lambda|-1)(|\lambda|-2)(|\lambda|-3)\hat\chi^\lambda\big((1\,2)(3\,4)\big)\end{aligned}$$

et, pour $\mu=(2,1)$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_{(2,1)}(\lambda) &= \hat\chi^\lambda\left(\sum_{\substack{1\le i,j,k\le|\lambda|\\ i,j,k \text{ distincts}}}(i\ j)(k)\right)\\ &= |\lambda|(|\lambda|-1)(|\lambda|-2)\hat\chi^\lambda\big((1\,2)\big).\end{aligned}$$

Dans ce deuxième cas, (k) est un cycle sur 1 élément, c'est-à-dire l'identité et l'on pourrait écrire simplement $(i\ j)$ au lieu de $(i\ j)(k)$. Mais il est important de sommer aussi sur les valeurs possibles de k pour que le nombre de termes dans la somme soit $|\lambda|(|\lambda|-1)(|\lambda|-2)$. On écrit donc $(i\ j)(k)$ pour rappeler que l'on somme aussi sur k.

Revenons à nouveau à la preuve de la proposition 3.3. Soit λ une partition ; en appliquant le corollaire 3.5, on a alors

$$\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)\cdot\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)=\hat{\chi}^{\lambda}\left(\sum_{\substack{1\le i,j\le|\lambda|\\ i\neq j}}(i\ j)\cdot\sum_{\substack{1\le k,l\le|\lambda|\\ k\neq l}}(k\ l)\right).$$

Ceci ressemble à l'expression de $\mathrm{Ch}_{(2,2)}$, à ceci près que les indices (i,j,k,l) dans la somme ne sont pas nécessairement distincts. On va donc découper la somme en fonction des égalités éventuelles vérifiées ou non entre les éléments des couples $(i\ j)$ et $(k\ l)$. Ainsi

$$\mathrm{Ch}_{(2,1)}(\lambda)=\hat{\chi}^{\lambda}\left(\sum_{\substack{1\le i,j,k,l\le|\lambda|\\ i,j,k,l \text{ distincts}}}(i\ j)(k\ l)+4\sum_{\substack{1\le i,j,l\le|\lambda|\\ i,j,l \text{ distincts}}}(i\ l\ j)+2\sum_{\substack{1\le i,j\le|\lambda|\\ i\neq j}}(i)(j)\right),$$

en notant que le 3-cycle provient du cas $(i=k)$ et le facteur 4 des 3 cas symétriques : $(i=l)$, $(j=k)$, $(j=l)$, le terme suivant provenant du cas $(i=k, j=l)$ et le facteur 2 du cas symétrique : $(i=l, j=k)$.
Chaque terme correspond à une fonction Ch_ν pour un certain ν et on obtient

$$\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)\cdot\mathrm{Ch}_{(2)}(\lambda)=\mathrm{Ch}_{(2,2)}(\lambda)+4\,\mathrm{Ch}_{(3)}(\lambda)+2\,\mathrm{Ch}_{(1,1)}(\lambda).$$

Le même type de raisonnement peut être appliqué à des partitions μ_1 et μ_2 quelconques. On obtient en général une combinaison linéaire de Ch_ν à coefficients entiers positifs, mais pour lesquels il n'existe malheureusement pas de formule close. □

Remarque 3.7. Rappelons que Ch_{μ_1} et Ch_{μ_2} s'expriment, de manière combinatoire, en fonction des N_G (Théorème 2.13). Les N_G sont faciles à multiplier (Proposition 2.26). Pourtant, je ne sais pas expliquer, en utilisant ce point de vue, le fait que le produit $\mathrm{Ch}_{\mu_1}\cdot\mathrm{Ch}_{\mu_2}$ soit une combinaison linéaire des Ch_ν.

2.2 Une base algébrique de Λ

Nous allons introduire ici une famille de fonctions qui forme une base algébrique de Λ.

Considérons $\zeta_k=(1\ \cdots\ k)\in\mathscr{S}_k$. Le théorème 2.13 s'écrit dans ce cas

$$\mathrm{Ch}_{(k)}=\sum_{\substack{\tau,\sigma\in\mathscr{S}_k\\ \tau\sigma=\zeta_k}}\varepsilon(\tau)N_{\sigma,\tau}.$$

Mais l'ensemble des permutations $\sigma,\tau\in\mathscr{S}_k$ telles que $\tau\sigma=\zeta_k$ est en bijection avec les cartes biparties unicellulaires enracinées avec k arêtes. En remarquant que

$$\varepsilon(\tau)=(-1)^{k-|C(\tau)|}=(-1)^k(-1)^{|V_\bullet(M_{\sigma,\tau})|},$$

Généralisation Grands diagrammes Polynômes de Kerov Caractères irréductibles Représentations groupes finis

le résultat ci-dessus se réécrit

$$\mathrm{Ch}_{(k)} = (-1)^k \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie} \\ \text{enracinée et unicellulaire} \\ \text{avec } k \text{ arêtes}}} (-1)^{|V_\bullet(M)|} N_{G(M)},$$

où $G(M)$ est le graphe sous-jacent à la carte M.

Dans l'ensemble $\mathscr{M}_k$ de ces cartes (biparties enracinées et unicellulaires avec k arêtes), une sous-famille va s'avérer particulièrement intéressante :

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_k &:= \{M \in \mathscr{M}_k,\ M \text{ sans arête multiple et sans cycle (« arbre »)}\} \\ &= \{M \in \mathscr{M}_k,\ M \text{ a } k+1 \text{ sommets}\} = \{M \in \mathscr{M}_k,\ M \text{ planaire}\},\end{aligned}$$

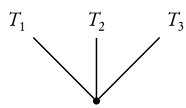
la dernière égalité provenant du caractère unicellulaire des éléments de $\mathscr{M}_k$. Cette famille correspond aux factorisations $\sigma\tau = \zeta_k$ telles que $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = k+1$.

Définition 3.8.

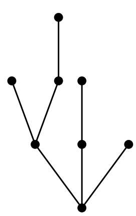
Les **arbres plans enracinés** sont définis récursivement de la manière suivante. Un arbre plan enraciné T est :

- soit un sommet noir seul $\bullet$,
- soit un sommet noir seul $\bullet$ relié à une liste ordonnée d'arbres plans enracinés.

Exemple 3.9 (Représentation graphique des arbres plans enracinés).
Si $T = (\bullet, (T_1, T_2, T_3))$, alors on le représente graphiquement ainsi :

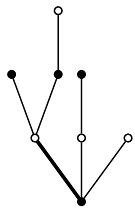


En appliquant cela récursivement, on obtient la représentation graphique d'un arbre plan enraciné. Voici un exemple :



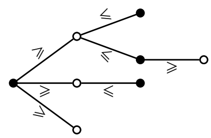
Lemme 3.10. Les arbres plans enracinés à k arêtes sont en bijection avec $\mathscr{T}_k$.

Démonstration. Expliquons comment passer de l'arbre à la carte. La structure de graphe est donnée par l'arbre. On impose par exemple que la racine soit un sommet noir du graphe. L'arbre peut ensuite être bicolorié de manière unique. Comme on a un arbre *plan* (c'est-à-dire un ordre sur les enfants d'un sommet quelconque), on a un ordre cyclique sur les arêtes partant d'un sommet quelconque. On choisit comme arête racine l'arête la plus à gauche partant de la racine de l'arbre. Voici par exemple la carte bipartie unicellulaire enracinée associée à l'arbre ci-dessus.



La construction inverse est immédiate. □

Remarque 3.11. Attention, la notion de fonction croissante que l'on a définie sur les graphes, induit, sur les arbres associés, une notion inhabituelle de croissance que l'on représente sur le schéma ci-dessous :



Nous allons définir à présent la famille $(R_l)_{l\geqslant 2}$ en restreignant dans $\mathrm{Ch}_{(l-1)}$ la somme à notre sous-ensemble de cartes $\mathscr{T}_{l-1}$ (attention au décalage d'indice qui sera expliqué dans la section 3) :

Définition 3.12.

On pose

$$R_l := (-1)^{l-1} \sum_{\substack{T \text{ arbre plan enraciné} \\ \text{à } l \text{ sommets} \\ (l-1 \text{ arêtes})}} (-1)^{|V_\bullet(T)|} N_{G(T)} = \sum_{\substack{\tau,\sigma\in\mathscr{S}_{l-1} \\ \tau\sigma=\zeta_{l-1} \\ |C(\sigma)|+|C(\tau)|=l}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau}.$$

On appelle ces R_l les **cumulants libres**.

Remarque 3.13. Ceci n'est pas la définition originale des fonctions R_l. La dénomination de *cumulant libre* vient d'un lien avec la théorie des probabilités libres. Nous expliquons (rapidement) la définition originale et ce lien dans l'annexe A.

Proposition 3.14.

La famille $(R_l)_{l\geq 2}$ forme une base algébrique de l'algèbre vect(Ch_μ).

3 Positivité des polynômes de Kerov

Comme les cumulants libres forment une base algébrique de Λ, tout élément de Λ, et en particulier Ch_μ, s'écrit de manière unique comme polynôme en les cumulants libres. Formellement,

Corollaire 3.15 (de la proposition 3.14). Pour toute partition μ, il existe un unique polynôme K_μ, appelé **polynôme de Kerov** tel que

$$\mathrm{Ch}_\mu = K_\mu(R_2, R_3, \ldots).$$

Dans ce qui suit, nous présentons les idées de la preuve du résultat suivant.

Théorème 3.16.
Le polynôme $K_{(k)}$ est à coefficients entiers positifs.

L'approche est d'exprimer $\mathrm{Ch}_{(k)}$ et les R_l en fonctions des N_G. Rappelons que R_l est une somme alternée de N_G associés à des arbres. En utilisant la proposition 2.26, on voit que les produits de R_l sont des sommes alternées de N_G associés à des **forêts** (*i.e.* des unions disjointes d'arbres). *A contrario*, Ch_μ s'écrit comme une somme alternée de N_G associés à des graphes quelconques. La difficulté va venir de ce point.

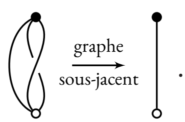
Pour voir ce qui se passe, commençons par quelques exemples.

3.1 Quelques exemples

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}_{(1)} &= N = R_2,\\
\mathrm{Ch}_{(2)} &= -N + N = R_3,\\
\mathrm{Ch}_{(3)} &= N + N - 3N + N = R_4 + R_2.
\end{aligned}$$

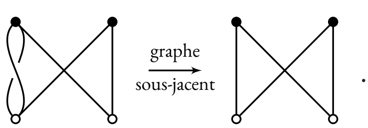
Le terme N de la dernière égalité correspond au graphe sous-jacent de la carte non-planaire suivante :



En effet, par définition, le graphe sous-jacent est obtenu à partir de la carte en oubliant le système de rotation ainsi que les multiplicités des arêtes.

Jusqu'à présent dans chaque terme, le graphe sous-jacent correspondant est sous forme d'arbre. C'est encore le cas pour $\mathrm{Ch}_{(4)}$.

Ce n'est plus vrai pour $\mathrm{Ch}_{(5)}$: la fonction $\mathrm{Ch}_{(5)}$ se présente sous la forme d'une somme de 120 termes dont $N_{G'}$ où G' est le graphe sous-jacent de la carte non-planaire suivante

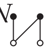
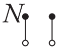


Ce graphe n'est pas une forêt et la fonction N n'apparaît donc pas telle quelle dans un produit de R_l. Ceci soulève la question suivante : peut-on réécrire N comme une combinaison linéaire de $(N_F)_{F \text{ forêt}}$?

3.2 Inclusion-exclusion cyclique

Motivés par la question ci-dessus, nous allons étudier les relations entre les fonctions N_G.

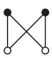
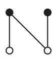
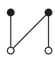
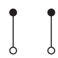
Lemme 3.17.

N  $-\ N$  $-\ N$  $+\ N$  $=0.$

Démonstration. On rappelle la formule suivante :

$$N_G(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\sum_{\substack{\varphi:V_G\to\mathbb{N}^*\\ \varphi\nearrow}} M_\varphi, \qquad \text{avec} \qquad M_\varphi:=\prod_{\circ\in V_\circ} p_{\varphi(\circ)}\prod_{\bullet\in V_\bullet} q_{\varphi(\bullet)},$$

où $\varphi\nearrow$ signifie que φ doit être croissante sur G. Notons

$G_0 :=$  , $\quad G_1 :=$  , $\quad G_2 :=$  , $\quad G_3 :=$  .

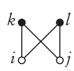
Tous les graphes G_i ont le même ensemble de sommets V_G. En réécrivant la formule donnant N_G sous la forme suivante,

$$N_G(\mathbf{p}\times\mathbf{q})=\sum_{\varphi:V_G\to\mathbb{N}^*} M_\varphi\cdot\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G},$$

on a, pour tous les N_{G_i}, le même ensemble de sommation. Il suffit alors de montrer que, pour toute fonction $\varphi : V_G\to\mathbb{N}^*$,

$$M_\varphi\left(\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G_0}-\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G_1}-\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G_2}+\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G_3}\right)=0.$$

Nous appellerons i,j,k,l les images des sommets de V_G par la fonction φ selon le schéma suivant :



.

Pour simplifier les notations, on introduit

$$\delta_r:=\delta_{\varphi\nearrow\text{ sur }G_r},$$

On procède par disjonction de cas.

1. si $i\le l$, la condition de croissance correspondant à l'arête  est vérifiée. Le fait que φ soit croissante sur un graphe ne dépend donc pas de l'appartenance de cette arête au graphe et on a :

$$\delta_0=\delta_1 \quad\text{et}\quad \delta_2=\delta_3 \qquad\Longrightarrow\qquad (\delta_0-\delta_1-\delta_2+\delta_3)=0\,.$$

2. De manière similaire, si $j\le k$,

$$\delta_0=\delta_2 \quad\text{et}\quad \delta_1=\delta_3 \qquad\Longrightarrow\qquad (\delta_0-\delta_1-\delta_2+\delta_3)=0\,.$$

3. si $i > k$, la condition de croissance correspondant à l'arête $\overset{k}{\bullet}\!\!-\!\!\underset{i}{\circ}$ n'est pas vérifiée. Comme tous les G_i contiennent cette arête, φ n'est croissante sur aucun des G_i et

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_3) = 0.$$

4. de même, si $j > l$,

$$\delta_0 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (\delta_0 - \delta_1 - \delta_2 + \delta_3) = 0;$$

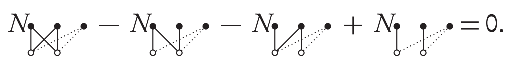
5. sinon on a $i > l$ (négation de 1), $l \geq j$ (négation de 4), $j > k$ (négation de 2) et $k \geq i$ (négation de 3), soit :

$$i > l \geq j > k \geq i,$$

d'où une contradiction ($i > i$). $\square$

Remarque 3.18.

- Cette démonstration se généralise à d'autres graphes : par exemple, en rajoutant à tous les graphes précédents des arêtes et des sommets identiques, on conserve la même équation. Par exemple (les deux arêtes supplémentaires sont en pointillé), on a :



- Ce qui est important c'est que le graphe de départ (celui contenant le plus d'arêtes) possède un cycle (pour la contradiction du 5). Dans le lemme ci-dessus, le cycle est de longueur 4, mais on pourrait considérer des cycles plus longs.
- Notons que, dans un graphe biparti, les cycles sont eux-même bipartis et donc de longueur paire. Étant donné un cycle, il y a alors deux manières de ne garder qu'une arête sur deux. Ces deux manières correspondent aux deux orientations possibles du cycle C : en effet, lorsque l'on a orienté C, on peut décider de ne garder (par exemple) que les arêtes orientées du blanc vers le noir.

D'une manière générale, on a :

Proposition 3.19.

Soit G un graphe biparti contenant un cycle C.
On choisit une orientation, notée $\vec{C}$, de C et on note $E_{\vec{C}}$ l'ensemble des arêtes (de C) orientées d'un sommet blanc vers un sommet noir :

$$E_{\vec{C}} := \{\text{arêtes } \circ\!\!\longrightarrow\!\!\bullet \}.$$

Alors

$$\sum_{E' \subseteq E_{\vec{C}}} (-1)^{|E'|} N_{G \setminus E'} = 0,$$

où $G \setminus E'$ est un graphe ayant les mêmes sommets que G avec pour ensemble d'arêtes $E_G \setminus E'$.

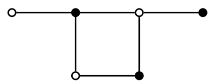
Démonstration. Semblable à la démonstration précédente. □

Nous appellerons ces relations entre les N_G relations d'**inclusion-exclusion cyclique**.

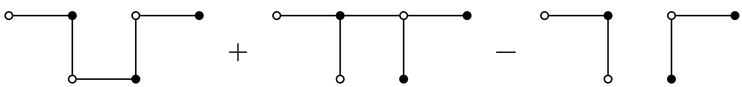
Corollaire 3.20. Pour tout graphe G biparti, on peut écrire N_G comme une combinaison linéaire de $(N_F)_{F \text{ forêts}}$ (en utilisant les relations d'inclusion-exclusion cyclique).

Démonstration. Si G est une forêt, il n'y a rien à faire.
Sinon, il contient un cycle et l'on peut donc appliquer la proposition précédente : le terme de la somme correspondant à $E' = \varnothing$ est $N_{G\setminus\varnothing} = N_G$. En passant ce terme de l'autre côté, on exprime donc N_G comme une combinaison linéaire des $N_{G\setminus E'}$, avec $E' \neq \varnothing$, donc une combinaison linéaire de fonctions N indicées par des graphes possédant *strictement* moins d'arêtes que G.
On conclut par récurrence descendante sur le nombre d'arêtes. □

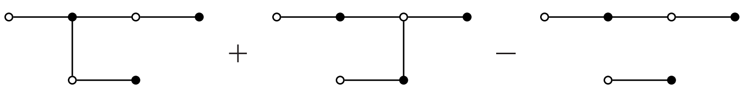
Remarque 3.21. Il faut faire attention au fait que cette précédente décomposition n'est pas canonique : il faut en effet choisir le cycle et l'orientation du cycle. Par exemple, si on part de la fonction N indexée par le graphe suivant :



on peut l'écrire de deux façons différentes comme combinaison linéaire de forêts, selon l'orientation du cycle (pour alléger les notations, on remplace ici N_G par G) :



ou



Ce résultat permet ainsi d'écrire chaque terme $N_{G(M)}$ dans $\mathrm{Ch}_{(k)}$ comme combinaison linéaire de $(N_F)_{F \text{ forêts}}$; comme M possède une structure de carte, il est possible, dans ce contexte, d'effectuer une telle décomposition de façon canonique et de rassembler des termes pour obtenir des cumulants libres R_i $(i \geq 2)$.
Il est donc possible, mais relativement technique, de comprendre les coefficients de K_μ de cette façon, voir [Fér 09].

Dans ce qui suit, nous allons présenter une autre méthode.

3.3 Un ensemble complet de relations

Dans ce que l'on vient de voir, on avait pris un graphe et on lui avait enlevé des arêtes pour arriver à des forêts ; ici, on va procéder de manière contraire, en essayant d'utiliser les relations d'inclusion-exclusion cyclique pour ajouter des arêtes. Commençons par définir la famille de graphes auxquels on ne peut plus ajouter d'arêtes par inclusion-exclusion cyclique.

Définition 3.22.

Soit I une **composition**[a] de taille d et de longueur paire $2l$:

$$I = (I_1, \dots, I_{2l}).$$

On définit le graphe biparti G_I de la façon suivante :

- l'ensemble de ses sommets V_{G_I} est de la forme

$$V_{G_I} = V_\circ \sqcup V_\bullet$$

où

$$V_\circ = V_{\circ,1} \sqcup \dots \sqcup V_{\circ,l} \qquad \text{avec} \qquad \big(\forall j \in \{1, \dots, l\}, \quad \mathrm{Card}(V_{\circ,j}) = I_{2j-1}\big),$$

et

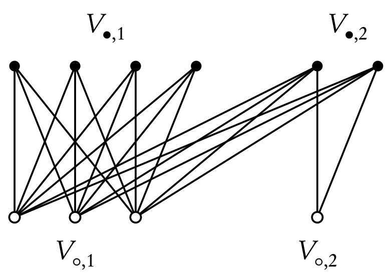
$$V_\bullet = V_{\bullet,1} \sqcup \dots \sqcup V_{\bullet,l} \qquad \text{avec} \qquad \big(\forall j \in \{1, \dots, l\}, \quad \mathrm{Card}(V_{\bullet,j}) = I_{2j}\big)\,;$$

- l'ensemble des arêtes E_{G_I} est défini par

$$E_{G_I} = \bigsqcup_{j \le h} V_{\circ,j} \times V_{\bullet,h}.$$

(a) *i.e.* une liste d'entiers strictement positifs de somme d.

Exemple 3.23. La liste $I := (3, 4, 1, 2)$ est une composition de taille 10. Le graphe G_I associé est alors le graphe suivant :



Remarque 3.24. Soit $I = (I_1, \dots, I_{2l})$ une composition. Posons $\mathbf{p} = (I_1, I_3, \cdots, I_{2l-1})$ puis $\mathbf{q} = (I_2, I_4, \cdots, I_{2l})$. Alors G_I correspond au graphe $B_{\mathbf{p}\times\mathbf{q}}$ associé au diagramme $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, comme on l'a défini dans la remarque 2.25.

Si on considère deux sommets v et v' de $V_\circ$, et que l'on regarde leurs voisins, on a toujours une inclusion dans un sens ou dans l'autre : formellement, en notant $\mathscr{V}(a)$ le voisinage du sommet a, on a

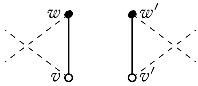
$$\mathscr{V}(v) \subseteq \mathscr{V}(v') \qquad \text{ou} \qquad \mathscr{V}(v') \subseteq \mathscr{V}(v).$$

Cette propriété est en fait caractéristique des graphes G_I, ce que l'on formalise dans le lemme suivant (dont la démonstration est immédiate) :

Lemme 3.25. Si G n'est égal à G_I pour aucune composition I, alors il existe $v, v' \in V_\circ$ tels que

$$\exists w, w' \in V_\bullet, \qquad w \in \mathcal{V}(v) \backslash \mathcal{V}(v') \quad \text{et} \quad w' \in \mathcal{V}(v') \backslash \mathcal{V}(v).$$

Remarque 3.26. Cela revient à dire que le graphe G contient le motif suivant :

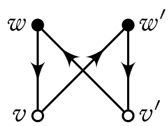


Ce motif doit être compris au sens suivant : le graphe peut contenir d'autres sommets et d'autres arêtes ayant au moins une extrémité hors du motif (symbolisées par les tirets). En d'autres termes, on demande que le graphe *induit* sur l'ensemble de sommets $\{v, v', w, w'\}$ contienne exactement les arêtes $\{(v, w), (v', w')\}$.

Soient G et (v, v', w, w') définis dans le lemme précédent. Posons

$$G_0 = G \sqcup \{(v, w'), (v', w)\},$$

ce qui revient à rajouter, dans le motif de la remarque les deux diagonales : G_0 possède donc un cycle de longueur 4. Choisissons l'orientation de C, que nous notons $\vec{C}$, telle que l'ensemble d'arêtes blanc-vers-noir correspondant soit $E_{\vec{C}} = \{(v, w'), (v', w)\}$, *cf.* la figure suivante :



En appliquant la proposition 3.19, on obtient

$$N_{G_0} - N_{G_0 \backslash \{(v,w')\}} - N_{G_0 \backslash \{(v',w)\}} + N_{G_0 \backslash \{(v,w'),(v',w)\}} = 0.$$

Or, par définition, $G = G_0 \backslash \{(v, w'), (v', w)\}$: N_G est par conséquent une combinaison linéaire d'éléments associés à des graphes possédant plus d'arêtes que G : on a bien réalisé la manœuvre contraire de celle de la section précédente, on l'on exprimait N_G à l'aide d'une combinaison linéaire d'éléments indicés par des graphes possédant moins d'arêtes que G.

Corollaire 3.27. Pour tout graphe biparti G, N_G peut s'écrire comme une combinaison linéaire de N_{G_I} (en utilisant uniquement des relations d'inclusion-exclusion cyclique sur des cycles de longueur 4).

Démonstration. identique à celle du corollaire 3.20 (sauf que l'on fait une récurrence *montante* sur le nombre d'arêtes). □

Comme pour les forêts, la manière d'obtenir cette décomposition n'est pas canonique, car il peut y avoir plusieurs occurrences du motif ci-dessus. Cependant, dans le cadre de ce corollaire (contrairement au corollaire 3.20), la décomposition obtenue au final est toujours la même, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 3.28.

Les N_{G_I}, où I décrit l'ensemble des compositions de longueur paire, sont linéairement indépendants.

Démonstration. À une composition J de longueur paire $2l$, nous associons le monôme

$$M_J = p_1^{J_1} p_2^{J_3} \cdots p_l^{J_{2l-1}} q_1^{J_2} q_2^{J_4} \cdots q_l^{J_{2l}}.$$

Supposons que M_J apparaisse dans le polynôme $N_{G_I}(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$, c'est-à-dire que $M_J = M_\varphi$ (notation de la démonstration du lemme 3.17), pour une fonction φ croissante sur G_I.
Cela implique que $I_1 \leq J_1$. En effet, tout sommet noir de G_I est relié aux sommets de $V_{\circ,1}$, c'est-à-dire à au moins I_1 sommets blancs. Comme q_1 a une puissance non nulle dans M_φ, au moins un sommet noir a pour image 1 par φ. Il faut donc que au moins I_1 sommets blancs aient pour image 1. Donc l'exposant de p_1 dans M_φ est au moins I_1 ce qui montre que $I_1 \leq J_1$.
Si on suppose que $I_1 = J_1$, alors nécessairement $I_2 \geq J_2$. En effet, dans ce cas, exactement les sommets de $V_{\circ,1}$ ont pour image 1 par φ. Cela implique que, parmi les sommets noirs, seuls ceux de $V_{\bullet,1}$ peuvent être envoyés sur 1 par φ. Comme φ envoie exactement J_2 sommets noirs sur 1 (c'est l'exposant de q_1 dans $M_\varphi = M_J$), on a $|V_{\bullet,1}| = I_2 \geq J_2$.
Le même raisonnement montre que si $I_1 = J_1$ et $I_2 = J_2$, alors nécessairement $I_3 \leq J_3$, *et cetera*.
Finalement, on a que M_J ne peut apparaître dans N_{G_I} que si $I \preceq J$ pour un certain ordre total $\preceq$ sur les compositions (ordre lexicographique sur $(I_1, -I_2, I_3, -I_4, \cdots)$), ce qui prouve immédiatement l'indépendance linéaire des N_{G_I}. □

Remarque 3.29. Prouver l'indépendance des fonction $\widetilde{N_{G_I}}$ est plus facile. En effet, comme expliqué dans la remarque 2.25 pour N_G, la quantité $\widetilde{N_G}(\lambda)$ est le nombre de morphismes *injectifs* de G dans B_λ. En combinant cela avec la remarque 3.24, on obtient que $\widetilde{N_{G_I}}(\lambda)$ est le nombre de morphismes injectifs de B_μ dans B_λ, où μ est le diagramme de Young de coordonnées multi-rectangulaires $(I_1, I_3, \cdots, I_{2l-1})$ et $(I_2, I_4, \cdots, I_{2l})$. Ce nombre est nul si μ n'est pas inclus dans λ et non nul si $\lambda = \mu$. Ceci montre l'indépendance linéaire des fonctions $\widetilde{N_{B_\mu}}$ (quand μ parcourt l'ensemble des diagrammes de Young), c'est-à-dire des fonctions $\widetilde{N_{G_I}}$ (quand I parcourt l'ensemble des compositions de longueur paire).

Il est ensuite possible de montrer que la matrice de passage entre les N_{G_I} et les $\widetilde{N_{G_I}}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, ce qui donne une autre preuve de la proposition ci-dessus.

Corollaire 3.30. Les N_{G_I} forment donc une base de vect(N_G). En particulier la composante de degré d_p en $\mathbf{p}$ et d_q en $\mathbf{q}$ de vect(N_G) a pour dimension

$$\sum_{l \geq 1} \binom{d_p - 1}{l-1} \binom{d_q - 1}{l-1} = \binom{d_p + d_q - 2}{d_p - 1}.$$

La composante de degré total d en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ de vect(N_G) a pour dimension 2^{d-2}.

Démonstration. Le terme général de la somme ci-dessus compte le nombre de compositions I de longueur $2l$ telles que G_I ait d_p sommets blancs et d_q sommets noirs. □

Exemple 3.31. Considérons le cas $d_p = d_q = 3$. À isomorphisme près, il existe 7 forêts biparties non-étiquetées sans sommets isolés avec 3 sommets blancs et 3 sommets noirs : 6 d'entre elles apparaissent dans la remarque 3.21 et la septième a trois composantes connexes toutes semblables à . Les fonctions N correspondantes engendrent la composante homogène de degré 3 en $\mathbf{p}$ et 3 en $\mathbf{q}$ de $\mathrm{vect}(N_G)$. Il y a exactement une relation entre ces fonctions, décrite dans la remarque 3.21. Cette composante homogène a donc dimension $6 = \binom{4}{2}$, comme prédit par la formule ci-dessus.

Remarque 3.32. Cela explique *a posteriori* l'existence de relations entre les $(N_F)_{F \text{ forêt}}$, car le nombre de forêts à d sommets augmente plus vite que 2^{d-2}.

Corollaire 3.33. Si on note $\mathscr{R}$ l'ensemble des relations d'inclusion-exclusion cyclique sur des cycles de longueur 4, l'espace vectoriel $\mathrm{vect}(N_G)$ admet la description suivante :

$$\mathrm{vect}(N_G) = \mathrm{vect}(G)/\mathscr{R}.$$

Démonstration. Partons de deux combinaisons linéaires égales

$$\sum_G c_G N_G = \sum_G c'_G N_G.$$

On peut réécrire chacun des membres de cette égalité comme une combinaison linéaire de N_{G_I} en utilisant uniquement des relations d'inclusion-exclusion cyclique sur des cycles de longueur 4. L'écriture comme combinaison linéaire de N_{G_I} étant unique, les deux expressions obtenues sont les mêmes. On peut donc passer du membre de droite au membre de gauche en utilisant uniquement des relations d'inclusion-exclusion cyclique sur des cycles de longueur 4. □

3.4 Une famille d'invariants sur les graphes

Dans cette section, nous allons définir combinatoirement des fonctions I_ν sur l'ensemble des graphes bipartis. Ces fonctions s'avèrent être compatibles avec les relations d'inclusion-exclusion cyclique.

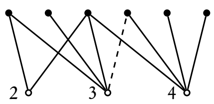
Définition 3.34.

- On appelle graphe décoré un couple (G, h) où G est un graphe biparti et h une fonction
$$h : V_\circ \to \{2, 3, \cdots\}$$
vérifiant $\sum_{\circ \in V_\circ} h(\circ) = |V_G|$.
- Un graphe connexe décoré est dit **expanseur** si
$$\forall V \subset V_\circ (V \neq \varnothing, V_\circ), \quad |\overline{\mathscr{V}(V)}| > \sum_{\circ \in V} h(\circ),$$

où $\overline{\mathscr{V}(V)}$ désigne le voisinage fermé de V (*i.e.* les sommets de V et les voisins des sommets de V).

- Un graphe décoré est dit expanseur si toutes ses composantes connexes le sont.
- Le type d'un graphe décoré est la partition obtenue en triant le multi-ensemble $h(V_\circ)$.

Exemple 3.35. Considérons le graphe décoré suivant (sans l'arête en pointillé). Les entiers indiquent les images par h des différents sommets blancs.



C'est un graphe décoré de type $(4,3,2)$. Il n'est pas expanseur car le voisinage fermé des deux sommets blancs de gauche est de taille 5 (la somme des h correspondants est aussi 5, attention à l'inégalité stricte dans la définition d'expanseur).

Si on rajoute l'arête en pointillé, le graphe décoré obtenu est expanseur.

Remarque 3.36. La terminologie de *graphes expanseurs* est empruntée à la théorie des graphes. Ces graphes, définis par des bornes inférieures sur les tailles des voisinages de tous les ensembles de sommets, ont de nombreuses applications dans diverses disciplines scientifiques, voir [HLW 06]. Il est surprenant de voir des conditions similaires apparaître dans notre problème. Malheureusement, nous n'avons pas d'explication conceptuelle de ce lien.

Nous pouvons maintenant définir nos fonctions I_ν.

Définition 3.37.

Soient ν une partition et G un graphe avec $\mathrm{Con}(G)$ composantes connexes. Alors, par définition, $(-1)^{\mathrm{Con}(G)} I_\nu(G)$ est le nombre de décorations h de G de type ν telles que (G,h) soit expanseur.

Cette définition est compatible avec l'inclusion-exclusion cyclique, au sens suivant :

Proposition 3.38.

Soient G un graphe biparti et $\vec{C}$ un cycle orienté de G. Alors, avec les notations de la proposition 3.19,

$$\sum_{E' \subseteq E_{\vec{C}}} (-1)^{|E'|} I_\nu(G \backslash E') = 0\,.$$

Démonstration. De manière surprenante, nous n'avons pas trouvé de preuve élémentaire (comme pour la proposition 3.19) de cette proposition. La preuve nécessite une reformulation de la définition de graphes expanseurs en terme d'équation de transports et des outils de géométrie convexe sur l'ensemble des solutions de ces équations. Nous l'omettons ici, voir [DFŚ 10, Lemme 8.3]. □

Cette proposition implique en particulier que $I_\nu\big(\sum c_j N_{G_j}\big) := \sum c_j I_\nu(G_j)$ est bien définie : comme le formalise le corollaire 3.33, si on prend deux combinaisons linéaires égales, on peut passer de l'une à l'autre par inclusion-exclusions cycliques, opérations qui ne modifient pas la valeur de I_ν.

Nous allons voir que l'image de produits de cumulants libres par I_τ est facile à calculer.

Lemme 3.39. Soit G un graphe contenant un pont[(a)] dont l'extrémité noire n'est pas une feuille[(b)]. Alors quelle que soit la décoration h de G, le couple (G,h) n'est pas expanseur.

(*a*) Un pont est une arête qui déconnecte le graphe lorsqu'on l'efface.
(*b*) Une feuille est un sommet de degré 1.

Démonstration. On peut supposer G connexe. Soit $V_\circ^1$ et $V_\circ^2$ les ensembles de sommets blancs des 2 composantes de G après avoir retiré le pont. Le fait que l'extrémité noire du pont n'est pas une feuille assure qu'aucun de ces deux ensembles n'est vide. Alors si h est une décoration telle que (G,h) est expanseur, on a

$$|\overline{\mathcal{V}(V_\circ^1)}|+|\overline{\mathcal{V}(V_\circ^2)}| \geq \sum_{\circ\in V_\circ^1} h(\circ)+1+\sum_{\circ\in V_\circ^2} h(\circ)+1 \geq \sum_{\circ\in V_\circ} h(\circ)+2=|V_G|+2.$$

Par ailleurs, seule l'extrémité noire du pont peut appartenir à la fois aux voisinages fermés de $V_\circ^1$ et $V_\circ^2$, ce qui montre que

$$|\overline{\mathcal{V}(V_\circ^1)}|+|\overline{\mathcal{V}(V_\circ^2)}| \leq |V_G|+1,$$

d'où la contradiction. □

En particulier, parmi les arbres, seuls ceux avec un seul sommet blanc (que nous appellerons *étoiles*) peuvent être expanseurs. On en déduit immédiatement le lemme suivant.

Lemme 3.40. Si ν et $\tau=(\tau_1,\dots,\tau_l)$ sont deux partitions, alors

$$I_\nu\big(R_{\tau_1}\cdots R_{\tau_l}\big)=\begin{cases}(-1)^l & \text{si}\quad \nu=\tau,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Démonstration. $R_{\tau_1}\cdots R_{\tau_l}$ est une somme alternée de fonctions N associées à des forêts. Parmi ces forêts, une seule est une union disjointe d'étoiles. Ces étoiles sont de taille respective $\tau_1,\dots,\tau_l$ et leur union disjointe apparaît avec un coefficient 1.
Cette union disjointe d'étoiles est expanseur pour une seule fonction h : celle qui associe à chaque sommet blanc la taille de son étoile. Elle est donc envoyée par I_τ sur $(-1)^l$ (elle a l composantes connexes) et sur 0 par tous les autres I_ν. Les autres forêts apparaissant dans $R_{\tau_1}\cdots R_{\tau_l}$ ne sont expanseurs pour aucune décoration, d'après le lemme précédent ; elles sont donc envoyés sur 0 par tous les I_ν. □

3.5 Retour au théorème

On sait que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_{(k)}&=K_k(R_2,R_3,\dots)\\&=\sum_\tau a_\tau^k R_{\tau_1}\cdots R_{\tau_l},\end{aligned}$$

où l'on somme sur l'ensemble des partitions $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_l)$ avec des parts supérieures ou égales à 2. On souhaite montrer la positivité des coefficients a_τ^k. On a, d'autre part, l'égalité (*cf.* 2.7 et 2.44)

$$\mathrm{Ch}_{(k)} = (-1)^k \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie unicellulaire} \\ \text{enracinée à } k \text{ arêtes}}} (-1)^{|V_\bullet|} N_{G(M)}.$$

Soit ν une partition de longueur l. On applique I_ν à ces deux expressions de $\mathrm{Ch}_{(k)}$. En utilisant $I_\nu\left(R_{\tau_1} \cdots R_{\tau_l}\right) = (-1)^l \delta_{\nu,\tau}$, on voit que

$$I_\nu(\mathrm{Ch}_{(k)}) = I_\nu \left(\sum_{\substack{\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_l) \\ \tau \text{ partition}}} a_\tau^k R_{\tau_1} \cdots R_{\tau_l} \right) = (-1)^l a_\nu^k.$$

En effet, I_ν est linéaire et seul le terme correspondant à $\tau = \nu$ survit dans la somme. D'autre part

$$\begin{aligned} I_\nu(\mathrm{Ch}_{(k)}) &= I_\nu \left((-1)^k \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie} \\ \text{unicellulaire enracinée} \\ \text{à } k \text{ arêtes}}} (-1)^{|V_\bullet|} N_{G(M)} \right) \\ &= (-1)^k (-1)^{|\nu|-l+1} \operatorname{Card} \left\{ \begin{array}{c} \text{cartes biparties unicellulaires enracinées à} \\ k \text{ arêtes décorées expanseur de type } \nu \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Le signe $(-1)^{|V_\bullet|}$ se transforme en $(-1)^{|\nu|-l}$ car toute carte décorée de type ν a exactement $|\nu|$ sommets, dont l blancs. Le facteur (-1) supplémentaire vient du $(-1)^{\mathrm{Con}(G)}$ dans la définition de I_ν : toutes les cartes unicellulaires sont connexes.

Finalement, $(-1)^k(-1)^{|\nu|-l+1}$ se simplifie en $(-1)^l$ car les cartes unicellulaires ont toujours des parités des nombres d'arêtes et de sommets différentes. Le coefficient a_ν^k est donc égal au cardinal de l'ensemble décrit ci-dessus, ce qui implique sa positivité (et en donne une interprétation combinatoire).

Ceci conclut la preuve du théorème 3.16.

Remarque 3.41. Soit μ une partition quelconque. Le même type de raisonnement permet de voir que les coefficients de K_μ comptent aussi des graphes décorés expanseurs correspondant à des couples de permutations, mais avec un signe dépendant du nombre de composantes connexes.

Notes et références

Bien que le théorème 2.13 soit nouveau (voir chapitre 2), la fonction Ch_μ a été introduite et étudiée par S. Kerov et G. Olshanski, voir [KO 94]. Le fait que Λ est une algèbre a été prouvé par ces auteurs, qui ont aussi donné plusieurs descriptions équivalentes de cette algèbre, voir aussi [IO 02].

Les cumulants libres R_l ont été introduits sous une autre forme par Ph. Biane, qui a montré que ceux-ci permettaient de décrire l'asymptotique des caractères normalisés pour de grands diagrammes équilibrés (sans grandes lignes, ni grandes colonnes) [Bia 98]. Le lien avec la définition donnée ici a été établi par A. Rattan [Rat 08] ou peut être vu comme un corollaire des résultats de Ph. Biane et du théorème 2.13.

L'idée de regarder le caractère normalisé Ch_{μ} comme un polynôme en les R_l est due à S. Kerov [Bia 03], qui a conjecturé la positivité des coefficients dans le cas où μ a une seule part. Cette conjecture a été démontrée dans l'article [Fér 09]. La preuve présentée ici est un peu simplifiée par rapport à celle de cet article. En effet, l'inclusion-exclusion cyclique était déjà présente dans [Fér 09], mais pas le fait que cela forme un ensemble complet de relations ; voir [Fér 14]. Les invariants I_{ν} ont été introduits dans l'article [DFŚ 10], dont le résultat principal est l'interprétation combinatoire donnée au paragraphe 3.5.

Bien que les propriétés de l'algèbre Λ aient des applications en probabilité (comme nous le verrons dans le chapitre suivant), nous ne connaissons pour l'instant pas d'« applications » de la positivité et/ou de l'interprétation combinatoire des coefficients des polynômes de Kerov.

Il semble néanmoins que la preuve soit intéressante en elle-même. En effet, l'inclusion-exclusion cyclique, qui apparaît naturellement dans ce problème, a déjà trouvé une application dans un autre contexte, voir [BF 09]. Par ailleurs, on peut montrer que les résultats présentés ici sur l'inclusion-exclusion cyclique restent vrais en utilisant des séries génératrices de fonctions croissantes avec un seul ensemble de variables [Fér 14]. Ces dernières étant beaucoup étudiées en combinatoire algébrique, on peut espérer que les idées présentées ici trouveront des applications hors de la théorie des représentations du groupe symétrique.

Chapitre 4

Grands diagrammes de Young

Dans ce chapitre, nous étudions asymptotiquement la forme de diagrammes de Young aléatoires, pris sous la **mesure de Plancherel**.

1 Mesure de Plancherel

Définition 4.1. Soit $n \geq 1$. La mesure de Plancherel $\mathscr{P}_n$ est la mesure de probabilité sur l'ensemble des diagrammes de Young de taille n (ensemble que l'on notera $\mathscr{Y}_n$; que l'on peut voir également comme l'ensemble des partitions λ de l'entier n) définie par

$$\forall \lambda \in \mathscr{Y}_n, \qquad \mathscr{P}_n(\lambda) := \frac{\left(\dim(V_\lambda)\right)^2}{n!}.$$

On rappelle que V_λ est la représentation irréductible du groupe symétrique $\mathscr{S}_n$ associée à λ.

Remarque 4.2. Un lemme général de théorie des représentations (voir l'exemple 1.16 de ce cours ou [FH 91, équation (2.19)]) affirme que la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles est égale au cardinal du groupe. La masse totale de $\mathscr{P}_n$ est donc l'unité car

$$\sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \left(\dim(V_\lambda)\right)^2 = n!.$$

Nous avons bien défini une mesure de probabilité.

Lemme 4.3. La mesure $\mathscr{P}_n$ vérifie la propriété suivante (où $\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}$ désigne l'espérance sous $\mathscr{P}_n$) :

$$\forall \pi \in \mathscr{S}_n \qquad \mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[\lambda \mapsto \hat{\chi}^\lambda(\pi)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \pi \neq \mathrm{id}, \\ 1 & \text{si} \quad \pi = \mathrm{id}. \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[\lambda \mapsto \hat{\chi}^{\lambda}(\pi)\right] = \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \frac{\left(\dim(V_\lambda)\right)^2}{n!} \cdot \hat{\chi}^{\lambda}(\pi)$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \in \mathscr{Y}_n} \dim(V_\lambda) \cdot \chi^{\lambda}(\pi).$$

Or, la somme directe de $\dim(V_\lambda)$ copies de chaque représentation irréductible V_λ n'est autre que la représentation régulière (voir exemple 1.16). On a donc

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[\lambda \mapsto \hat{\chi}^{\lambda}(\pi)\right] = \frac{1}{n!}\chi^{\mathrm{reg}}(\pi),$$

ce qui se simplifie, d'après l'exemple 1.5, en

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[\lambda \mapsto \hat{\chi}^{\lambda}(\pi)\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \pi \neq \mathrm{id}, \\ 1 & \text{si} \quad \pi = \mathrm{id}. \end{cases}$$ □

Remarque 4.4. C'est en fait une équivalence, mais nous n'utiliserons pas l'autre direction. Cela explique cependant que nous pouvons étudier l'asymptotique des diagrammes uniquement en utilisant cette caractérisation.

Il existe une définition combinatoire équivalente de la mesure de Plancherel, utilisant l'**algorithme de Robinson-Schensted** (1) :

Définition 4.5.

On définit $\mathscr{P}_n$ comme la mesure image de la mesure uniforme sur $\mathscr{S}_n$ par la fonction

$$\begin{cases} \mathscr{S}_n \to & \mathscr{Y}_n \\ \sigma \mapsto & \text{forme commune des tableaux de } \mathrm{RS}(\sigma), \end{cases}$$

où $\mathrm{RS}(\sigma)$ est l'image de σ par l'algorithme de Robinson-Schensted.

Le corollaire suivant utilise une propriété classique de Robinson-Schensted, que nous ne redémontrerons pas ici (voir [Sch 61, Theorem 1]).

Corollaire 4.6. La distribution de λ_1 sous la mesure de Plancherel est équivalente à la distribution de la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation σ choisie au hasard dans $\mathscr{S}_n$, suivant la loi uniforme.

Remarque 4.7. On pourrait aussi définir la mesure de Plancherel comme une chaîne de Markov, plus de détails dans la section 2 de l'annexe.

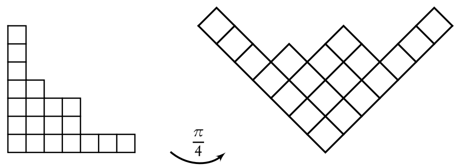
(1) Il s'agit d'un algorithme classique en combinatoire algébrique envoyant bijectivement une permutation sur deux tableaux *standard* (*i.e.* remplissage d'un diagramme de Young avec des conditions de croissance) de même forme (*i.e.* des remplissages du *même* diagramme). Il a été introduit indépendamment par G. de B. Robinson [Rob 38] et C. Schensted [Sch 61].

Généralisation Grands diagrammes Polynômes de Kerov Caractères irréductibles Représentations groupes finis

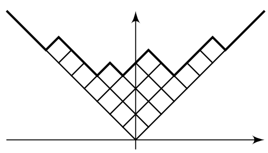
2 Convergence de suites de diagrammes

Le but de ce chapitre est d'étudier asymptotiquement une suite de diagrammes aléatoires distribués selon la mesure de Plancherel. Pour cela, nous avons besoin de définir une notion de « convergence de diagrammes ».

La première étape est d'encoder le diagramme par une fonction continue. Pour cela, on part du diagramme de Young tel qu'on l'a vu (en représentation dite *française*), on effectue une rotation de $\frac{\pi}{4}$ radians dans le sens trigonométrique et une homothétie de rapport $\sqrt{2}$, ce qui nous donne le diagramme de Young en **représentation russe** : par exemple,



Ensuite, on garde le « bord supérieur » que l'on prolonge à gauche et à droite par le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$. Ceci permet bien d'encoder le diagramme par le graphe d'une fonction $\omega_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.



Ceci nous amène à définir la notion de diagramme continu :

Définition 4.8.

Un **diagramme continu** λ est la donnée d'une fonction $\omega_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

- il existe $A > 0$ tel que pour tout $|x| > A$, $\omega_\lambda(x) = |x|$;
- $\omega_\lambda(x)$ est 1-lipschitzienne.

Sur cet ensemble de fonctions, on considère la distance associée à la norme uniforme : si λ et λ' sont deux diagrammes continus, leur distance $d(\lambda, \lambda')$ est définie par

$$d(\lambda, \lambda') := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\omega_\lambda(x) - \omega_{\lambda'}(x)|.$$

On note que cette dernière quantité a un sens car, par définition d'un diagramme continu, la fonction $x \mapsto |\omega_\lambda(x) - \omega_{\lambda'}(x)|$ est continue à support compact, donc bornée sur $\mathbb{R}$. Comme on a une notion de distance, on a bien une notion de « convergence de diagrammes ».

Il reste une difficulté : quand on augmente le nombre de cases de λ, la fonction ω_λ va, à part dans de rares cas [(2)], tendre vers l'infini ; pour faire émerger une notion de convergence, il faut renormaliser la taille des cases :

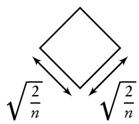
(2) Il est facile de montrer que la probabilité que l'un de ces cas arrive tend vers 0 exponentiellement vite, voir le lemme 4.28.

Définition 4.9.

Soit λ une partition de n. On définit le diagramme continu $\widehat{\lambda}$ par la fonction associée $\omega_{\widehat{\lambda}}$, avec

$$\omega_{\widehat{\lambda}}(x) := \frac{1}{\sqrt{n}}\omega_\lambda(\sqrt{n}x).$$

Remarque 4.10. Il s'agit simplement de la formulation de l'idée intuitive de dessiner λ avec des « petites cases » ayant chacune pour longueur de côté $\sqrt{\frac{2}{n}}$, en représentation russe :



l'aire de chaque case est alors $\frac{2}{n}$ et l'aire totale du diagramme est 2.

Nous avons à présent tous les éléments pour énoncer le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 4.11 (Vershik/Kerov, Logan/Schepp, 1977).

Soit $(\lambda^{(n)})_{n\geq 1}$ une suite de diagrammes de Young telle que pour tout n, $\lambda^{(n)}$ est de taille n, distribué suivant la mesure de Plancherel $\mathscr{P}_n$.
Alors, en probabilité,

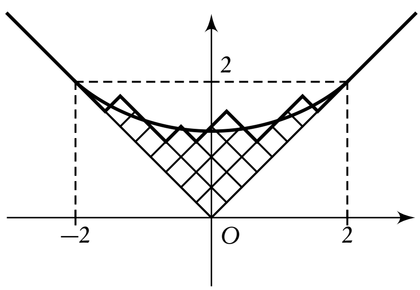
$$\lim_{n\to\infty} ||\omega_{\widehat{\lambda^{(n)}}} - \omega_\Omega||_\infty = 0,$$

où Ω est le diagramme continu défini par

$$\omega_\Omega(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad |x| \geq 2, \\ \frac{2}{\pi}\left(x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4-x^2}\right) & \text{si} \quad |x| \leq 2. \end{cases}$$

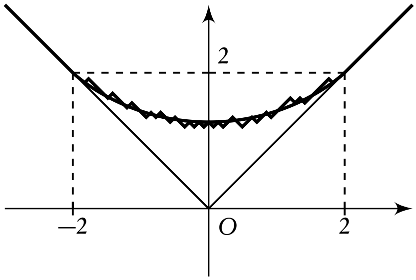
Notons que bien que les diagrammes $(\lambda^{(n)})_{n\geq 1}$ soient aléatoires, la limite est déterministe. Il s'agit d'un phénomène comparable à la loi des grands nombres.

Exemple 4.12. Si on superpose les graphes des fonctions $\omega_{\widehat{\lambda^{(n)}}}$ et ω_Ω, on obtient[a] par exemple, pour $n = 20$:



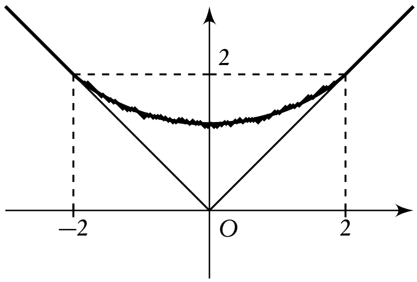
$n = 20$

pour $n = 200$:



$n = 200$

et pour $n = 2000$:



$n = 2000$

(*a*) Les exemples ci-dessus ont été pris au hasard grâce au générateur fourni dans le logiciel *sage* [S+ 13]. Générer des diagrammes aléatoires sous la mesure de Plancherel est facile grâce à la description combinatoire de la définition 4.5 (générer une permutation aléatoire de taille n et appliquer l'algorithme de Robinson-Schensted sont deux opérations de complexités linéaire et quadratique en n).

Dans ce chapitre, nous présentons les principales idées pour aboutir à ce théorème. Nous commençons par quelques propriétés de l'algèbre Λ introduite dans le chapitre précédent qui seront centrales dans notre approche.

3 Graduation de l'algèbre Λ

Nous allons équiper Λ d'une graduation :

Définition 4.13.

Soit $F : \sqcup_{n\geq 1}\mathcal{Y}_n \to \mathbb{C}$ une fonction appartenant à $\mathrm{vect}(N_G)$. On définit alors le **degré** de F par

$$\deg(F) := \deg_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left(F(\mathbf{p}\times\mathbf{q})\right),$$

où $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ désigne le diagramme associé aux suites d'entiers $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ (*cf.* définition 2.27).

Remarque 4.14. On a vu (proposition 2.31) que $N_G(\mathbf{p}\times\mathbf{q})$ est un polynôme en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$. C'est encore le cas de F, pour $F \in \mathrm{vect}(N_G)$, ce qui montre que la définition a bien un sens.

Exemple 4.15.

- On a
$$\deg(N_G) = |V_G|.$$
En effet, on a
$$N_G(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \sum_{\substack{\varphi : V_G \to \mathbb{N}^* \\ \varphi \nearrow}} \prod_{\circ \in V_\circ} p_{\varphi(\circ)} \prod_{\bullet \in V_\bullet} q_{\varphi(\bullet)},$$
chaque terme de la somme possède donc un degré cumulé en **p** et **q** égal au nombre de sommets de G (ce qui montre par ailleurs que N_G est homogène).
- Lorsque l'on indexe les fonctions N par des permutations et non par des graphes, cela devient
$$\deg(N_{\sigma,\tau}) = \deg(N_{G_{\sigma,\tau}}) = |C(\sigma)| + |C(\tau)|.$$
- Ce dernier résultat nous permet de voir que R_l (voir définition 3.12) est homogène de degré l :
$$\deg(R_l) = l.$$

Quel est alors le degré de
$$\mathrm{Ch}_\mu = \sum_{\substack{\tau,\sigma \in \mathscr{S}_k \\ \tau\sigma = \pi}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau},$$
qui se présente sous la forme d'une somme non homogène (rappelons que, dans cette formule, μ est une partition de k et π est une permutation arbitraire de type cyclique μ) ? La question se ramène à savoir quelles sont les valeurs possibles de $|C(\sigma)| + |C(\tau)|$ sous la condition $\tau\sigma = \pi$. Commençons par un lemme classique sur le groupe symétrique.

Lemme 4.16. Soit $\sigma \in \mathscr{S}_k$. Si on définit la fonction r par
$$r(\sigma) := k - |C(\sigma)|,$$
alors $r(\sigma)$ est égale au nombre minimal de transpositions t_i nécessaires pour écrire $\sigma = t_1 \cdots t_h$.

Démonstration. Regardons l'effet de la multiplication par une transposition $(i\ j)$ sur une permutation π :

- si i et j sont dans un même cycle de π, cela coupe le cycle en deux ;
- si i et j sont dans des cycles distincts de π, on rassemble les cycles.

Dans les deux cas, le nombre de cycles varie de 1.

On souhaite partir de l'identité et arriver à σ en multipliant uniquement par des transpositions. L'identité possède k cycles de longueur 1, σ a $|C(\sigma)|$ cycles. Comme le nombre de cycles varie de 1 à chaque étape, on a besoin d'au moins $k - |C(\sigma)|$ transpositions pour obtenir σ.

Par ailleurs, une permutation σ peut toujours s'écrire comme produit de $k - |C(\sigma)|$ transpositions : si σ est un cycle $(i_1 i_2 \cdots i_k)$, alors
$$\sigma = (i_1 i_2)(i_2 i_3) \cdots (i_{k-1} i_k).$$

Dans le cas général, il suffit d'écrire chaque cycle de la décomposition en cycles disjoints comme produit de transpositions comme ci-dessus. □

Généralisation Grands diagrammes Polynômes de Kerov Caractères irréductibles Représentations groupes finis

On peut maintenant répondre à la question ci-dessus.

Lemme 4.17. Supposons que $\tau, \sigma \in \mathscr{S}_k$ avec $\tau\sigma = \pi$. Alors :

- $|C(\tau)| + |C(\sigma)| \leq k + |C(\pi)|$ (de plus, si on fixe π, la borne est atteinte) ;
- de plus, si on a l'égalité (*i.e.* $|C(\tau)| + |C(\sigma)| = k + |C(\pi)|$, ce que l'on appellera ici la « factorisation minimale » de π) et si $\pi = \pi_1 \cdots \pi_s$ (décomposition en cycles disjoints), alors on peut écrire $\tau = \tau_1 \ldots \tau_s$ et $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_s$ de telle sorte que τ_i et σ_i permutent les mêmes éléments que π_i et que τ_i, σ_i forment une factorisation minimale de π_i (*i.e.* $\tau_i\sigma_i = \pi_i$ et $|C(\tau_i)| + |C(\sigma_i)| = k_i + 1$, où k_i est le nombre d'éléments du cycle π_i).

Remarque 4.18. On se place dans le cas où $\tau\sigma = \pi$ est une factorisation *minimale* de π.

- Dans les décompositions $\tau = \tau_1 \ldots \tau_s$ et $\sigma = \sigma_1 \ldots \sigma_s$, certains des τ_i ou σ_i peuvent être l'identité.
- Le graphe $G_{\sigma,\tau}$ va s'écrire comme une union disjointe de graphes :

$$G_{\sigma,\tau} = G_{\sigma_1,\tau_1} \sqcup \cdots \sqcup G_{\sigma_s,\tau_s},$$

et par conséquent,

$$N_{\sigma,\tau} = N_{\sigma_1,\tau_1} \cdots N_{\sigma_s,\tau_s}.$$

Démonstration. Soient $v = r(\sigma)$ et $u = r(\tau)$. D'après le lemme 4.16, σ et τ s'écrivent respectivement comme produits de v et u transpositions :

$$\tau = t_1 \cdots t_u, \quad \sigma = t_{u+1} \cdots t_{u+v}.$$

Donc $\pi = \tau\sigma$ s'écrit comme produit de $r(\sigma) + r(\tau)$ transpositions, ce qui implique

$$r(\pi) \leq r(\sigma) + r(\tau).$$

Ceci correspond au premier point de ce lemme (la borne est atteinte pour $\tau = \mathrm{id}_k$ et $\sigma = \pi$).
Supposons qu'il y ait égalité. Cela signifie que

$$\pi = t_1 \cdots t_u t_{u+1} \cdots t_{u+v}$$

est une décomposition minimale. D'après la démonstration du lemme 4.16, cela implique que les produits successifs par les transpositions t_j en partant de l'identité ne font que rassembler des cycles. Ainsi, pour tout j, les deux éléments permutés par t_j appartiennent au même cycle de π. Comme σ et τ sont des produits de t_j, le support de chacun de leurs cycles est inclus dans le support d'un cycle de π, ce qui explique l'écriture

$$\tau = \tau_1 \cdots \tau_s, \quad \sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_s.$$

La minimalité du produit

$$\pi_i = \tau_i \sigma_i$$

pour tout i découle immédiatement de l'égalité $r(\pi) = r(\sigma) + r(\tau)$. □

Revenons à présent à la question du degré de Ch_μ. On avait remarqué qu'il ne s'agissait pas d'une fonction homogène et, en utilisant le lemme précédent, on trouve que

$$\deg(\mathrm{Ch}_\mu) \leq k + |C(\pi)| = |\mu| + l(\mu),$$

$l(\mu)$ étant le nombre de parts de μ.

Comme les Ch_μ sont non homogènes, on peut se demander quelle est leur composante homogène de plus haut degré :

- si $\mu = (k)$, alors on peut choisir pour π le cycle $(1 \ldots k)$, et $k + |C(\pi)| = k+1$. Ainsi la composante de plus haut degré de $\mathrm{Ch}_{(k)}$ est

$$\sum_{\substack{\tau,\sigma\in\mathscr{S}_k \\ \tau\sigma=(1\ \ldots\ k) \\ |C(\sigma)|+|C(\tau)|=k+1}} \varepsilon(\tau) N_{\sigma,\tau},$$

  qui n'est autre que la définition de R_{k+1}. On peut montrer que

$$\deg\left(\mathrm{Ch}_{(k)} - R_{k+1}\right) \leq k-1,$$

  en remarquant que, si $\tau\sigma = \pi$, $|C(\sigma)| + |C(\tau)|$ a toujours même parité (c'est une conséquence immédiate de l'existence de la signature sur $\mathscr{S}_n$) : il n'y a donc pas de termes de degré k, et si l'on enlève les termes de degré $k+1$, les termes restants sont au plus de degré $k-1$.
- Dans le cas général, le terme de plus haut degré correspond aux couples (σ, τ) tels que $\tau\sigma = \pi$, et $|C(\sigma)| + |C(\tau)| = k + |C(\pi)|$. Le deuxième point du lemme 4.17 indique que l'ensemble de ces couples est un produit direct indexé par les cycles de π. Le degré de Ch_μ est donc $|\mu| + \ell(\mu)$ et sa composante homogène de plus haut degré est

$$\prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}\,.$$

  De même que dans le cas de $\mathrm{Ch}_{(k)}$ (en tenant compte de la parité), on a

$$\deg\left(\mathrm{Ch}_\mu - \prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}\right) \leq |\mu| + l(\mu) - 2 \tag{4.1}$$

Nous avons encore besoin du lemme suivant avant de pouvoir revenir au théorème sur la forme limite :

Lemme 4.19. Si $F \in \mathrm{vect}\left(\mathrm{Ch}_\mu\right)$, soit

$$F = \sum_{\mu \text{ partition}} a_\mu \mathrm{Ch}_\mu$$

où $(a_\mu)_\mu$ est une famille presque nulle de nombres complexes, alors

$$\deg(F) = \max_{\mu,\ a_\mu\neq 0} |\mu| + l(\mu).$$

Démonstration. On a directement que

$$\deg(F) \leq \max_{\mu,\, a_\mu \neq 0} |\mu| + l(\mu),$$

car le degré de Ch_μ est inférieur à $|\mu| + l(\mu)$.
Réciproquement, soit

$$d = \max_{\mu,\, a_\mu \neq 0} |\mu| + l(\mu).$$

On regarde la composante homogène de degré d de F, que l'on notera $\hom_d(F)$. Alors

$$\hom_d(F) = \sum_{\mu \text{ partition}} a_\mu \hom_d(\mathrm{Ch}_\mu).$$

Mais seules les partitions μ telles que $|\mu| + l(\mu) = d$ contribuent : en effet, si $|\mu| + \ell(\mu) < d$, alors $\hom_d(\mathrm{Ch}_\mu) = 0$ et si $|\mu| + \ell(\mu) > d$, alors $a_\mu = 0$. Donc

$$\hom_d(F) = \sum_{\substack{\mu \text{ partition} \\ |\mu|+l(\mu)=d}} a_\mu \hom_d(\mathrm{Ch}_\mu) = \sum_{\substack{\mu \text{ partition} \\ |\mu|+l(\mu)=d}} a_\mu \prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}.$$

Par définition de d, au moins un des a_μ est non nul. Par ailleurs, les R_l formant une base algébrique de Λ (prop. 3.14), les $\prod_{i=1}^{l(\mu)} R_{\mu_i+1}$ sont linéairement indépendants, ce qui implique

$$\hom_d(F) \neq 0.$$

L'élément F a donc pour degré d, comme annoncé dans le lemme. □

4 Un premier résultat de convergence

Soit $F \in \mathrm{vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$. Comme nous étudions des fonctions sur les diagrammes de Young et des suites de diagrammes aléatoires, il est naturel de se demander si la suite $F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$ converge pour $n \to +\infty$.

Le problème est que F n'est, *a priori*, pas définie sur les diagrammes renormalisés. Cependant,

- $F(\mathbf{p} \times \mathbf{q})$ est un polynôme en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$, ce qui permet d'étendre sa définition à des valeurs non entières de $\mathbf{p}$ et de $\mathbf{q}$;
- par ailleurs $\widehat{\lambda^{(n)}}$ correspond à $\lambda^{(n)}$ dessiné avec des cases de côté $\frac{1}{\sqrt{n}}$, en représentation française, ce qui revient à multiplier les composantes de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ correspondant à λ par $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Il est donc naturel d'étendre la définition de F en posant, avec $\lambda = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$,

$$F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right) := F(\mathbf{p} \times \mathbf{q})\Big|_{\substack{p_i = \frac{r_i}{\sqrt{n}} \\ q_i = \frac{s_i}{\sqrt{n}}}}.$$

En particulier, si F est homogène de degré d,

$$F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right) = n^{-d/2} F\left(\lambda^{(n)}\right).$$

Ainsi, R_l étant homogène de degré l, nous allons pouvoir étudier

$$R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right) = n^{-l/2} R_l(\lambda^{(n)})\,;$$

les R_l formant une base algébrique de vect(Ch_μ) (prop. 3.14), en cas de convergence, cela permettra de prouver la convergence de $F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$ pour tout élément F de vect(Ch_μ).
Le cas $l = 2$ est trivial puisque, pour toute partition λ de n,

$$R_2(\lambda) = N_{\mathrm{id}_1,\mathrm{id}_1}(\lambda) = n \qquad \Longrightarrow \qquad R_2\left(\widehat{\lambda}\right) = 1.$$

En utilisant le lemme 4.3, on trouve, pour $\pi \in \mathcal{S}_k$ fixé (et donc le type cyclique μ de π étant fixé)

$$\mathrm{E}_{\mathcal{P}_n}\left[\mathrm{Ch}_\mu\right] = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-k+1) & \text{si } \mu = (1^k), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce à cette formule, nous allons établir un lien entre la graduation définie précédemment et le comportement asymptotique de l'espérance sous la mesure de Plancherel :

Lemme 4.20. Si $F \in \mathrm{vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$, alors

$$\mathrm{E}_{\mathcal{P}_n}\left[F\left(\lambda^{(n)}\right)\right] = O\left(n^{\frac{\deg(F)}{2}}\right).$$

Démonstration. Soit

$$F = \sum_{\mu \text{ partition}} a_\mu \mathrm{Ch}_\mu,$$

alors

$$\mathrm{E}_{\mathcal{P}_n}[F] = \sum_{k\geq 1} a_{(1^k)} n(n-1)\cdots(n-k+1) = O(n^d)$$

où

$$d = \max_{a_{(1^k)}\neq 0} k.$$

Mais $\deg(F) \geq 2d$, en utilisant le lemme 4.19. □

Pour étudier les R_l, nous allons utiliser la *méthode du second moment* (*i.e.* estimation de l'espérance du carré de la variable) :

$$\mathrm{E}_{\mathcal{P}_n}\left[R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)^2\right] = \frac{1}{n^l}\mathrm{E}_{\mathcal{P}_n}\left[R_l\left(\lambda^{(n)}\right)^2\right].$$

Or, on sait, d'après l'équation (4.1), que

$$\deg\left(\mathrm{Ch}_{(l-1,l-1)} - R_l^2\right) \leq 2l-2,$$

donc, d'après le lemme précédent,

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[R_l\left(\lambda^{(n)}\right)^2 - \mathrm{Ch}_{(l-1,l-1)}\left(\lambda^{(n)}\right)\right] = O\left(n^{l-1}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)^2\right] = \frac{1}{n^l}\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}&\left[\mathrm{Ch}_{(l-1,l-1)}\left(\lambda^{(n)}\right)\right]\\ &+\frac{1}{n^l}\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[R_l\left(\lambda^{(n)}\right)^2 - \mathrm{Ch}_{(l-1,l-1)}\left(\lambda^{(n)}\right)\right],\end{aligned}$$

et puisque $l \geq 3$, on a $\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[\mathrm{Ch}_{(l-1,l-1)}\left(\lambda^{(n)}\right)\right] = 0$ et enfin

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)^2\right] = O\left(n^{-1}\right).$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 4.21.

Pour $l \geq 3$, $R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$ converge en probabilité vers 0, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathscr{P}_n\left(\left|R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Démonstration. En effet, comme $R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)^2$ est une variable positive,

$$\mathrm{E}_{\mathscr{P}_n}\left[R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)^2\right] \geq \varepsilon^2 \mathscr{P}_n\left(\left|R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)\right| \geq \varepsilon\right),$$

ce qui nous donne le résultat, en utilisant l'équivalent trouvé précédemment pour le second moment de $R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$. □

Les $(R_l)_{l\geq 2}$ formant une base algébrique de vect(Ch_μ), on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 4.22. Soit $F \in$ vect(Ch_μ). Alors $F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$ tend en probabilité vers une constante.

Remarque 4.23.

- En observant les moments d'ordre 4, on aurait pu prouver une convergence presque sûre.
- En modifiant la graduation, on peut prouver que les

$$\sqrt{\frac{n}{l-1}}R_l\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$$

tendent vers des Gaussiennes centrées indépendantes.

5 Convergence géométrique

Dans cette section, nous prouvons le théorème 4.11 qui est plus parlant que la convergence des $F\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right)$. On va voir néanmoins que cette dernière est une première étape dans la preuve du théorème 4.11.

On a défini, pour toute partition λ, une fonction $\omega_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, voir section 2. On va plutôt travailler, dans ce qui suit, sur la fonction suivante :

$$y_\lambda(x) := \frac{1}{2}(\omega_\lambda(x) - |x|),$$

fonction possédant l'intérêt essentiel d'être (continue) à support compact.

On définit aussi la famille $(t_k)_{k\geq 2}$ de fonctions sur les diagrammes de Young ainsi : pour tout $k \geq 2$ et toute partition λ,

$$t_k(\lambda) := (k-1)\int_{-\infty}^{+\infty} x^{k-2} y_\lambda(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 4.24. Pour tout $k \geq 2$, la fonction t_k est un élément de vect(Ch_μ) et

$$t_k = R_k + \sum_{l\geq 2} \frac{1}{l!}(k-1)\cdots(k-l+1) \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_l\geq 2\\ k_1+\cdots+k_l=k}} R_{k_1}\cdots R_{k_l}.$$

Démonstration. Nous admettrons ce résultat. Les idées de cette preuve sont décrites dans l'annexe A. □

Remarque 4.25. La formule ci-dessus implique que, pour $k \geq 2$, la fonction t_k est homogène de degré k. Le terme de la somme correspondant à $\ell = 1$ est R_k alors que tous les autres termes font intervenir des R_j avec $j < k$. On déduit de cette remarque que $(t_k)_{k\geq 2}$ est une base algébrique de vect(Ch_μ).

Cette dernière formule, ainsi que les résultats de la section précédente (tous les cumulants libres, sauf R_2, tendent vers 0), impliquent les limites suivantes (en probabilité) :

$$t_{2k+1}\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad t_{2k}\left(\widehat{\lambda^{(n)}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!}\frac{(2k-1)!}{k!}.$$

Lemme 4.26. Soit Ω le diagramme continu défini dans l'énoncé du théorème 4.11, on a

$$t_{2k+1}(\Omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad t_{2k}(\Omega) = \frac{1}{k!}\frac{(2k-1)!}{k!}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un « simple » calcul d'intégrale. □

Remarque 4.27. Si la preuve de ce lemme est élémentaire, elle nécessite cependant de connaître à l'avance la forme de la fonction ω_Ω. On pourrait *deviner* la formule de ω_Ω à partir de la valeur limite des cumulants libres, mais cela nécessite des techniques sophistiquées d'analyse complexe, voir [Bia 01].

On sait que, pour tout $k \geq 2$, on a la convergence en probabilité :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\widetilde{\lambda^{(n)}}}(x) x^{k-2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} y_\Omega(x) x^{k-2}\,\mathrm{d}x$$

(où $y_\Omega(x) := \frac{1}{2}(\omega_\Omega(x) - |x|)$). Par linéarité, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_{\widetilde{\lambda^{(n)}}}(x) P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} y_\Omega(x) P(x)\,\mathrm{d}x$$

est encore vraie en probabilité. Si l'intervalle d'intégration était compact, on pourrait en déduire que c'est vrai pour toute fonction continue f par le théorème de Weierstrass.

L'intervalle d'intégration n'est pas compact, mais tout se passe comme s'il était grâce au lemme suivant. Ici $\mathrm{Supp}(f)$ désigne le **support** de f, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des x tels que $f(x) \neq 0$.

Lemme 4.28. On a

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{P}_n\left(\mathrm{Supp}\left(y_{\widetilde{\lambda^{(n)}}}\right) \subseteq [-3,3]\right) = 1.$$

Démonstration. On a l'équivalence

$$\mathrm{Supp}\left(y_{\widetilde{\lambda^{(n)}}}\right) \subseteq [-3,3] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 \leq 3\sqrt{n} \\ l(\lambda) \leq 3\sqrt{n} \end{cases}$$

(où λ_1 est la première part de λ). Mais λ_1 est la longueur d'une plus grande sous-suite croissante d'une permutation aléatoire suivant une loi uniforme (corollaire 4.6). Pour simplifier les notations, supposons que $3\sqrt{n}$ est entier, on a

$$\mathscr{P}_n\left(\lambda_1 \leq 3\sqrt{n}\right) = 1 - \frac{\mathrm{Card}\left(\{\sigma \text{ perm. ayant une sous-suite croissante de longueur } 3\sqrt{n}\}\right)}{n!}.$$

En effet, les deux membres de l'égalité calculent la probabilité qu'une permutation aléatoire uniforme de taille n n'ait pas de sous-suite croissante de taille $3\sqrt{n}$. Le numérateur de cette dernière fraction est majoré par la quantité suivante (qui compte les permutations avec une sous-suite croissante de longueur $3\sqrt{n}$ marquée)

$$\binom{n}{3\sqrt{n}}\binom{n}{3\sqrt{n}}(n - 3\sqrt{n})!.$$

D'une part, grâce à la formule de Stirling, on prouve aisément que cette quantité est négligeable devant $n!$. D'autre part, on a, par symétrie de la mesure de Plancherel,

$$\mathscr{P}_n\left(l(\lambda) \leq 3\sqrt{n}\right) = \mathscr{P}_n\left(\lambda_1 \leq 3\sqrt{n}\right).$$

Donc $\mathscr{P}_n\left(\lambda_1 \leq 3\sqrt{n}\right)$, et a fortiori $\mathscr{P}_n\left(l(\lambda) \leq 3\sqrt{n}\right)$, tendent vers 1. $\square$

À présent, en nous plaçant sous l'hypothèse $\mathrm{Supp}(y_{\widehat{\lambda^{(n)}}}) \subseteq [-3,3]$, on peut remplacer le polynôme P par une fonction continue F quelconque dans la limite précédente et donc (en probabilité),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-3}^{3} y_{\widehat{\lambda^{(n)}}}(x)F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{3} y_\Omega(x)F(x)\,\mathrm{d}x.$$

En prenant des fonctions cloches, on en déduit la convergence ponctuelle

$$\forall x, \qquad y_{\widehat{\lambda^{(n)}}}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_\Omega(x) \qquad \text{(en probabilité)}.$$

Les fonctions y étant 1-lipschitziennes, il vient la convergence uniforme (en probabilité)

$$\|y_{\widehat{\lambda^{(n)}}} - y_\Omega\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Cela conclut la preuve du théorème 4.11.

Pour conclure, mentionnons le problème suivant. Il est naturel de se demander si le résultat sur les fluctuations de R_l (Remarque 4.23) n'a pas un pendant géométrique, décrivant une convergence en loi de la quantité

$$\sqrt{n}(\omega_{\widehat{\lambda^{(n)}}} - \omega_\Omega).$$

V. Ivanov et G. Olshanski [IO 02, equation (9.4)] donnent un résultat de ce type, mais la limite n'existe qu'au sens des distributions. Ceci suggère que regarder des fonctions sur les diagrammes est effectivement la bonne approche pour étudier les diagrammes…

Notes et références

La question de la forme limite de diagrammes sous la mesure de Plancherel est apparue dans les années 60 en lien avec une question plus élémentaire, connue sous le nom de problème d'Ulam (voir l'article de survol [AD 99]) : quelle est la longueur de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire uniforme ?

Le théorème 4.11 a été prouvé indépendemment en 1977 par deux groupes de chercheurs : B. Logan et L. Shepp d'une part [LS 77] et S. Kerov et A. Vershik d'autre part [KV 77].

La preuve que nous présentons ici suit majoritairement les idées d'une démonstration plus récente, due aussi à S. Kerov et publiée après son décès par V. Ivanov et G. Olshanski [IO 02]. Cette nouvelle preuve est relativement simple lorsque l'on connait les propriétés de l'algèbre Λ. Elle a l'avantage de donner accès aux fluctuations des R_l renormalisées, ce que ne permettaient pas les deux preuves de 1977.

Diverses déformations de la mesure de Plancherel, dont une liée aux polynômes de Jack et aux quantités introduites dans le chapitre suivant, ont été étudiées avec des techniques similaires [DF 14, FM 12, Mél 11], ce qui montre la robustesse de cette technique.

Pour finir ces remarques bibliographiques, mentionnons aussi les travaux suivants [BDJ 99, Oko 00, BOO 00], qui étudient finement le comportement des premières lignes du diagramme $\lambda^{(n)}$. Cela fait apparaître une surprenante connexion avec la théorie des matrices aléatoires.

CHAPITRE 5

VERS UNE GÉNÉRALISATION POUR LES POLYNÔMES DE JACK

Dans ce court chapitre, nous présentons une déformation des caractères normalisés. L'objectif est d'évoquer de nombreuses questions ouvertes liées au contenu de ce cours. On ne fera donc aucune démonstration dans cette partie.

1 Extension des caractères irréductibles

Notre point de départ est le lien déjà évoqué entre fonctions symétriques et théorie des représentations du groupe symétrique. Le résultat suivant est connu sous le nom de **formule de Frobenius** et est crucial dans les approches classiques pour calculer les caractères irréductibles (mais pas dans l'approche duale présentée dans ce cours).

Théorème 5.1.
Soit λ une partition de n. Alors

$$S_\lambda = \sum_{\mu \text{ partition de } n} \chi^\lambda_\mu \frac{p_\mu}{z_\mu}$$

où

- les S_λ et les p_μ désignent respectivement les fonctions de Schur et les fonctions puissance (deux familles classiques de fonctions symétriques que nous ne redéfinirons pas ici) ;
- z_μ est un facteur numérique explicite :

$$z_\mu = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\mu)} m_i(\mu)!$$

  (où $m_i(\mu)$ est le nombre de fois où l'on trouve la part i dans la partition μ) ;
- χ^λ_μ est une autre notation pour $\chi^\lambda(\pi)$, avec π une permutation de type cyclique μ.

Remarque 5.2.

- La famille (p_μ) étant une base de l'espace des fonctions symétriques, cette formule détermine en elle-même les caractères irréductibles.
- Dans ce qui suit, on utilisera plutôt la version suivante de cette formule :

$$\frac{S_\lambda}{\dim(V_\lambda)} = \sum_{\mu \text{ partition de } n} \widehat{\chi}^\lambda_\mu \frac{p_\mu}{z_\mu},$$

avec

$$\widehat{\chi}^\lambda_\mu := \frac{\chi^\lambda_\mu}{\dim(V_\lambda)}.$$

Plusieurs déformations des fonctions de Schur apparaissent dans la littérature, dont celle connue sous le nom des **polynômes de Jack**, famille indexée par les partitions, dépendant d'un paramètre α réel positif. Les éléments seront notés ici [(1)]

$$J^{(\alpha)}_\lambda.$$

Quand $\alpha = 1$, on retrouve les fonctions de Schur à un facteur multiplicatif près

$$J^{(1)}_\lambda = n! \frac{S_\lambda}{\dim(V_\lambda)}.$$

Ceci nous amène à définir la déformation suivante des caractères :

Définition 5.3.

Soit $\widehat{\chi}^{\lambda,(\alpha)}_\mu$ défini par

$$\frac{J^{(\alpha)}_\lambda}{n!} = \sum_{\mu \text{ partition de } n} \widehat{\chi}^{\lambda,(\alpha)}_\mu \frac{p_\mu}{z_\mu}.$$

Remarque 5.4.

- Pour $\alpha = 1$, la formule de Frobenius implique que

$$\widehat{\chi}^{\lambda,(1)}_\mu = \widehat{\chi}^\lambda_\mu.$$

- Pour $\alpha = 2$, les quantités $\widehat{\chi}^{\lambda,(2)}_\mu$ sont les valeurs des **fonctions sphériques zonales** d'une certaine **paire de Gelfand**. La théorie des paires de Gelfand est une extension en un certain sens de la théorie des représentations des groupes finis ; les fonctions sphériques zonales y jouent le rôle des caractères normalisés.

On étend alors la définition de la fonction Ch_μ de la façon suivante :

$$\mathrm{Ch}^{(\alpha)}_\mu(\lambda) = \begin{cases} \alpha^{-\frac{|\mu|-l(\mu)}{2}} n(n-1)\cdots(n-k+1)\widehat{\chi}^{\lambda,(\alpha)}_{\mu 1^{n-k}} & \text{si} \quad k \leq n, \\ 0 & \text{si} \quad k > n, \end{cases}$$

(1) Attention, il existe plusieurs manières de normaliser les polynômes de Jack. Nous utilisons ici la notation du livre de I. G. Macdonald [Mac 95].

où $n = |\lambda|$, $k = |\mu|$ et où $\mu 1^{n-k}$ représente la partition μ complétée avec $n - k$ parts égales à 1.

Le facteur $\alpha^{-\frac{|\mu|-l(\mu)}{2}}$ permet d'obtenir la symétrie suivante (en notant λ' la partition transposée de λ) :

$$\mathrm{Ch}_\mu^{(1/\alpha)}(\lambda) = \mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)}(\lambda').$$

2 Propriétés de $\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)}$

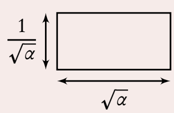
La proposition suivante étend les résultats de la section 2.

Proposition 5.5.

- L'espace vectoriel $\mathrm{vect}(\mathrm{Ch}_\mu^{(\alpha)})$ est stable par multiplication et forme donc une algèbre.
- Une base algébrique de cette algèbre est la famille $R_2^{(\alpha)}, R_3^{(\alpha)}, \dots$ avec

$$R_k^{(\alpha)} := R_k\big(T_\alpha(\lambda)\big),$$

où $T_\alpha(\lambda)$ est le diagramme λ représenté avec des cases de tailles $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \times \sqrt{\alpha}$:



Remarque 5.6.

- Notons que $T_\alpha(\lambda)$ est un diagramme continu. L'évaluation $R_k\big(T_\alpha(\lambda)\big)$ est donc bien définie.
- L'apparition de cases rectangulaires dans le contexte des polynômes de Jack n'est pas nouvelle, voir [Ker 00].
- La méthode de démonstration de cette propriété laisse une question ouverte (*a priori* difficile) : peut-on décrire combinatoirement le produit $\mathrm{Ch}_{\mu_1}^{(\alpha)} \cdot \mathrm{Ch}_{\mu_2}^{(\alpha)} \dots$?

Une conséquence est que, pour tout $k \geq 1$, il existe un polynôme $K_k^{(\alpha)}$ tels que

$$\mathrm{Ch}_{(k)}^{(\alpha)} = K_k^{(\alpha)}(R_2^{(\alpha)}, R_3^{(\alpha)}, \dots).$$

Le théorème 3.16 admet la généralisation conjecturale suivante :

Conjecture 5.7. Les coefficients de $K_k^{(\alpha)}$ sont des polynômes à coefficients entiers positifs en $\gamma = \alpha^{-1/2} - \alpha^{1/2}$.

3 Vers une généralisation du théorème 2.13 ?

Une approche pour prouver la conjecture 5.7 serait de généraliser le théorème 2.13 qui, rappelons-le, s'écrit :

$$\mathrm{Ch}_\mu = (-1)^{|\mu|} \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie} \\ \text{enracinée et unicellulaire}}} (-1)^{|V_\bullet(M)|} N_{G(M)}.$$

Pour $\alpha = 2$, à l'aide de l'interprétation en terme de fonctions sphériques zonales, on peut démontrer le résultat suivant :

$$\mathrm{Ch}^{(2)}_{(k)}(\lambda) = (-1)^{|\mu|} \sum_{\substack{M \text{ carte bipartie} \\ \text{enracinée et unicellulaire} \\ \text{plongée dans une surface } \textbf{non orientée}}} (-1)^{|V_\bullet(M)|} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{|\pi|+\ell(\pi)-|V(M)|} N_{G(M)}\big(T_2(\lambda)\big).$$

Ce qui amène à proposer la question suivante :

Question 5.8. Existe-t-il un poids « naturel » mon_M, dépendant du graphe plongé M, tel que

$$\mathrm{Ch}^{(\alpha)}_{(k)}(\lambda) = \sum_{\substack{M \text{ graphe biparti} \\ \text{enraciné et unicellulaire} \\ \text{plongé dans une surface non orientée}}} (-1)^k (-1)^{|V_\bullet(M)|} \mathrm{mon}_M N_{G(M)}\big(T_\alpha(\lambda)\big) \text{ ?}$$

Remarque 5.9.

- Si on trouve mon_M sous la forme d'une puissance de $\gamma = \alpha^{-1/2} - \alpha^{1/2}$, une réponse affirmative à cette question impliquerait directement la véracité de la conjecture 5.7 (en suivant la preuve effectuée dans le cas particulier $\alpha = 1$).
- Pour $\alpha = 1$ et 2 (*i.e.* $\gamma = 0$ et $-1/\sqrt{2}$), il est raisonnable de demander que la formule recherchée corresponde aux formules rappelées ci-dessus. On veut donc que le poids d'une carte soit 0 si $\alpha = 1$ et la carte est non orientée et constant si $\alpha = 2$. Ce poids quantifierait donc en quelque sorte la *non-orientation* de la carte. Cela ressemble à une autre conjecture aussi liée aux polynômes de Jack, appelée *Matching-Jack conjecture* faite par I. Goulden et D. Jackson en 1996 [GJ 96].
- Nous avons effectué des tests numériques pour chercher un tel poids mon_M. Malheureusement les poids testés jusqu'à présent échouent à partir des partitions de tailles 9 ou 10. Notons que le nombre de graphes plongés dans des surfaces non orientées grandit sur-exponentiellement avec le nombre d'arêtes, ce qui rend les tests difficiles.

Notes et références

La formule de Frobenius est un résultat très classique de la théorie des représentations du groupe symétrique. On le trouve par exemple dans les deux livres cités au chapitre 1 [FH 91, Sag 01], ainsi que dans les livre de I. Macdonald [Mac 95, Section I.7] ou de R. Stanley [Sta 99, Section 7.18], plus centrés sur les fonctions symétriques.

Les polynômes de Jack ont été introduits dans un article séminal de H. Jack [Jac 70]. Une bonne introduction moderne au sujet est [Mac 95, Section VI.10], même si certains résultats plus récents, comme la formule combinatoire de F. Knop and S. Sahi [KS 97], n'y sont pas.

L'idée de regarder les coefficients des polynômes de Jack dans la base des fonctions puissances comme une fonction de λ est due à M. Lassalle, qui a prouvé la propostion 5.5 [Las 08, Proposition 2] et proposé (sous une forme légèrement différente) la conjecture 5.7 [Las 09, Conjecture 1.2].

La preuve du cas particulier $\alpha = 2$ est un résultat commun avec P. Śniady [FŚ 11b]. La question 5.8 est le sujet d'un travail récent avec P. Śniady et M. Dołęga [DFŚ 14].

Finalement, notons que la question d'une explication combinatoire du fait que le produit $\mathrm{Ch}^{(\alpha)}_{\mu_1} \cdot \mathrm{Ch}^{(\alpha)}_{\mu_2}$ est une combinaison linéaire de $\mathrm{Ch}^{(\alpha)}_{\nu}$ est aussi liée à la *Matching-Jack conjecture* de I. Goulden et D. Jackson, voir [DF 14, Section 4.5].

Annexe A

Mesure de transition de diagramme

L'objectif de cette annexe est de montrer le type d'arguments et d'objets sous-jacents à certains énoncés non démontrés du cours. Comme ces aspects plus analytiques de l'approche duale des représentations du groupe symétrique ne sont pas centraux dans ce cours, nous ne donnerons pas toutes les preuves mais fournirons des références où les trouver.

1 Coordonnées entrelacées des diagrammes de Young

Un diagramme de Young peut être décrit par les longueurs de ses lignes (*i.e.* les parts de la partition) ou par ses coordonnées rectangulaires, voir section 2.4.

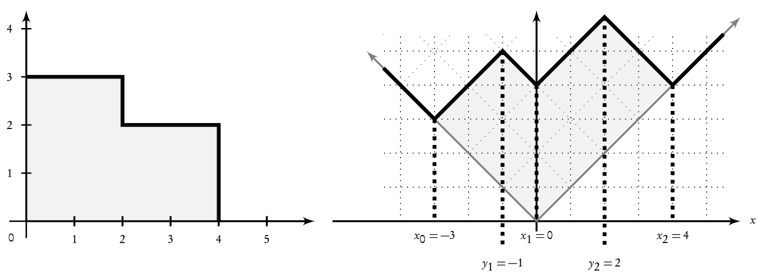
Nous présentons ici un troisième ensemble de coordonnées pour les diagrammes de Young, les **coordonnées entrelacées de Kerov**.

Pour les obtenir, il faut dessiner le diagramme selon la représentation russe (voir page 57) et regarder les abscisses des minima et maxima locaux du bord supérieur du diagramme. Cela définit deux suites $(x_i)_{0\leq i\leq m}$ (pour les minima) et $(y_i)_{1\leq i\leq m}$ (pour les maxima) qui sont *entrelacées*, *i.e.*

$$x_0 < y_1 < x_1 < \cdots < y_m < x_m.$$

Notons que l'entier m dépend aussi du diagramme.

Exemple A.1. Par exemple pour le diagramme $(4,4,2)$, on obtient la figure suivante.



Ses coordonnées entrelacées sont donc : $x_0=-3<y_1=-1<x_1=0<y_2=2<x_2=4$.

Concluons cette section par la remarque suivante : les x_i sont exactement les emplacements où l'on peut ajouter une case à λ pour obtenir un diagramme de taille $|\lambda|+1$, que l'on notera $\lambda^{\uparrow(i)}$.

2 Mesure de transition

Considérons la fraction rationnelle

$$G_\lambda(z) = \frac{\prod_{i=1}^m (z-y_i)}{\prod_{i=0}^m (z-x_i)}.$$

On peut développer cette fraction en éléments simples

$$G_\lambda(z) = \sum_{i=0}^m \frac{\mu_i}{z-x_i},$$

où les μ_i sont des nombres réels. Leur somme est égal à $\lim_{z\to\infty} zG_\lambda(z) = 1$. Par ailleurs, les μ_i peuvent s'exprimer en fonction des dimensions des représentations irréductibles du groupe symétrique ainsi (voir [Ker 96, Section 3.2]) :

$$\mu_i = \frac{\dim(V_{\lambda^{\uparrow(i)}})}{(|\lambda|+1)\dim(V_\lambda)}.$$

On peut interpréter les μ_i comme une mesure de probabilités discrètes, où l'atome $\{x_i\}$ a pour probabilité μ_i. Notons μ_λ cette mesure, que nous appellerons **mesure de transition** du diagramme λ. La fraction G_λ est alors la **transformée de Stieltjes** de la mesure μ_λ, *i.e.* :

$$G_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\lambda(x)}{z-x}.$$

Cette mesure est fortement liée à la mesure de Plancherel. En effet, définissons une suite de diagrammes aléatoires $(\lambda^{(n)})_{n\geq 1}$ ainsi :

- $\lambda^{(1)}$ est l'unique diagramme à 1 case ;
- supposons $\lambda^{(n)}$ construit et définissons x_i et μ_i par rapport à $\lambda^{(n)}$ comme ci-dessus. Alors, par définition, $\lambda^{(n+1)}$ est obtenu à partir de $\lambda^{(n)}$ en ajoutant une case dans son coin d'abscisse x_i avec probabilité μ_i.

Il est facile de voir, grâce à la formule ci-dessus reliant μ_i et les dimensions des V_λ que, pour tout $n \geq 1$, $\lambda^{(n)}$ est distribué selon la mesure de Plancherel $\mathscr{P}_n$.

3 Moments de la mesure de transition et fonctions reliées

Il est intéressant de considérer les moments de la mesure de transition

$$\mathscr{M}_k(\lambda) = \sum_{i=0}^m \mu_i x_i^k.$$

Ces moments définissent des fonctions sur les diagrammes de Young.

Pour $k=1$, la fonction obtenue est nulle pour tous les diagrammes, mais on peut montrer que les $(\mathscr{M}_k)_{k\geq 2}$ sont algébriquement indépendants, voir [IO 02, Section 2]. Notons Λ l'algèbre engendrée, nous allons voir dans la section suivante qu'elle est égale à vect(Ch_μ).

Les fonctions $\mathscr{M}_k$ apparaissent lorsqu'on effectue le développement asymptotique de $G_\lambda(z)$ en l'infini :

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 2} \frac{\mathscr{M}_k(\lambda)}{z^{k+1}}.$$

Si l'on développe $\ln(G_\lambda(z))$, on obtient des coefficients dont il est facile de voir qu'ils coïncident avec les (t_k) définis dans le chapitre 4, section 5. Comme ln est une transformation inversible, les $(t_k)_{k\geq 2}$ forment aussi une base algébrique de Λ et on peut donner explicitement leur changement de base avec les $(\mathscr{M}_k)$.

Une autre transformation intéressante à appliquer à G_λ est la R-transformation, introduite par D. Voiculescu [Voi 86], définie ainsi :

$$\frac{1}{G_\lambda(z)} + R_\lambda(G_\lambda(z)) = z.$$

Quand G est la transformée de Stieltjes d'une mesure (comme ici), les coefficients du développement de R autour de 0 sont appelés **cumulants libres** et jouent un rôle important en probabilité libre. Notons $R'_l(\lambda)$ ces coefficients dans le cas de la R-transformation de G_λ :

$$R_\lambda(z) = R'_1(\lambda) + zR'_2(\lambda) + z^2 R'_3(\lambda) + \cdots$$

Comme pour les moments R'_1 est identiquement nulle. La R-transformation étant inversible, les $(R'_l)_{l\geq 2}$ forment aussi une base algébrique de Λ.

Nous allons voir dans la section suivante que les R'_l correspondent aux R_l utilisés dans ce cours. Pour cela, nous aurons besoin de la définition équivalente suivante de R'_l, que l'on peut obtenir par inversion de Lagrange,

$$R'_l(\lambda) = \frac{1}{l-1}[z^{-1}]G_\lambda(z)^{-l+1},$$

où le développement de $G_\lambda(z)^{-l+1}$ s'effectue autour de $+\infty$ (avec des puissances de z *décroissantes*).

4 Lien avec les caractères

Grâce à des manipulations sur les fonctions symétriques, on peut déduire de la formule de Frobenius (théorème 5.1) la formule suivante [Bia 03, Section 5] :

Proposition A.2.

Soit $k\geq 1$. Pour tout diagramme λ

$$\mathrm{Ch}_{(k)}(\lambda) = \frac{1}{k}[z^{-1}]\frac{1}{G_\lambda(z)G_\lambda(z-1)\cdots G_\lambda(z-k+1)}.$$

Comme précédemment, le développement se fait au voisinage de $+\infty$.

Ce résultat implique que $\mathrm{Ch}_{(k)}$ appartient à l'algèbre Λ (on peut développer les $G_\lambda(z)$ en série et ainsi exprimer $\mathrm{Ch}_{(k)}$ en fonction des $\mathscr{M}_l$).

Cette formule permet aussi de regarder le terme de plus haut degré en $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$: pour cela, il suffit d'oublier les décalages dans la formule ci-dessus et l'on obtient

$$\frac{1}{k}[z^{-1}]G_\lambda(z)^{-k},$$

qui n'est autre que R'_{k+1}. Ceci montre que la famille R'_l définie dans cette annexe est égale à la famille R_l considérée dans le chapitre 3 (définition 3.12) : on rappelle en effet que R_{k+1} est la composante de plus haut degré de Ch_k, voir chapitre 4, section 3 (on pourrait aussi donner une preuve directe que ces deux familles coïncident : c'est ce qu'a fait A. Rattan dans [Rat 08]).

Il nous reste à voir que l'algèbre Λ correspond à $\mathrm{vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$.

Démonstration (Idée). Comme $\mathrm{Ch}_{(k)}$ appartient à Λ c'est un polynôme en les R'_l de la forme [1]

$$R'_{k+1} + P(R'_2, \cdots, R'_k).$$

Cette formule peut être inversée récursivement et on peut exprimer les R'_k en fonction des $\mathrm{Ch}_{(l)}$.

La famille $(\mathrm{Ch}_{(l)})_{l\geq 1}$ est donc une base algébrique de Λ. La description du produit des Ch_μ permet de voir que, si $l_1 \geq \cdots \geq l_r$,

$$\mathrm{Ch}_{l_1} \cdots \mathrm{Ch}_{l_r} = \mathrm{Ch}_{(l_1,\ldots,l_r)} + \cdots,$$

où les trois points désignent des termes de plus petit degré (avec $\deg(\mathrm{Ch}_\mu) = |\mu|$). Comme les $(\mathrm{Ch}_{l_1} \cdots \mathrm{Ch}_{l_r})_{l_1\geq\cdots\geq l_r\geq 1}$ forment une base de Λ c'est aussi le cas des Ch_μ, d'où l'égalité annoncée $\Lambda = \mathrm{vect}(\mathrm{Ch}_\mu)$. □

(1) On a décrit ce polynôme dans le chapitre 3, mais on n'aura pas besoin de ces résultats ici.

Bibliographie

[AD 99] **D. Aldous et P. Diaconis**. Longest increasing subsequences : from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 36, pp. 413–432, 1999.

[BDJ 99] **J. Baik, P. Deift et K. Johansson**. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 12, N° 4, pp. 1119–1178, 1999.

[Bia 98] **P. Biane**. Representations of symmetric groups and free probability. *Adv. Math.*, Vol. 138, N° 1, pp. 126–181, 1998.

[Bia 01] **P. Biane**. Approximate factorization and concentration for characters of symmetric groups. *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 4, pp. 179–192, 2001.

[Bia 03] **P. Biane**. Characters of symmetric groups and free cumulants. In : *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics (St. Petersburg, 2001)*, pp. 185–200, Springer, Berlin, 2003.

[BOO 00] **A. Borodin, A. Okounkov et G. Olshanski**. Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups. *J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 13, N° 3, pp. 481–515, 2000.

[BF 09] **A. Boussicault et V. Féray**. Application of graph combinatorics to rational identities of type A. *Elec. Jour. Combinatorics*, Vol. 16, N° R145, pp. 1–39, 2009.

[DS 94] **P. Diaconis et M. Shahshahani**. On the eigenvalues of random matrices. *J. Appl. Prob.*, Vol. 31, pp. 49–62, 1994.

[DFŚ 10] **M. Dołęga, V. Féray et P. Śniady**. Explicit combinatorial interpretation of Kerov character polynomials as numbers of permutation factorizations. *Adv. Math.*, Vol. 225, N° 1, pp. 81–120, 2010.

[DFŚ 14] **M. Dołęga, V. Féray et P. Śniady**. Jack polynomials and orientability generating series of maps. *Sém. Lothar. Comb.*, Vol. B70j, 2014. 50 pp. (electronic).

[DF 14] **M. Dołęga et V. Féray**. Gaussian fluctuations of Young diagrams and structure constants of Jack characters . 2014. preprint arXiv :1402.4615.

[Fér 09] **V. Féray**. Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials. *J. Algebr. Comb.*, Vol. 29, N° 4, pp. 473–507, 2009.

[Fér 10] **V. Féray**. Stanley's Formula for Characters of the Symmetric Group. *Ann. Comb.*, Vol. 13, N° 4, pp. 453–461, 2010.

[Fér 14] **V. Féray**. Cyclic inclusion-exclusion. 2014. preprint arXiv :1410.1772.

[FM 12] **V. Féray et P.-L. Méliot**. Asymptotics of q-Plancherel measures. *Prob. Th. Rel. Fields*, Vol. 152, pp. 589–624, 2012.

[FŚ 11a] **V. Féray et P. Śniady**. Asymptotics of characters of symmetric groups related to Stanley character formula. *Ann. Math*, Vol. 173, N° 2, pp. 887–906, 2011.

[FŚ 11b] **V. Féray et P. Śniady**. Zonal polynomials via Stanley's coordinates and free cumulants. *J. Alg.*, Vol. 334, N° 1, pp. 338–373, 2011.

[FH 91] **W. Fulton et J. Harris**. *Representation theory : a first course*. Vol. 129 dans *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1991.

[GJ 96] **I. P. Goulden et D. M. Jackson**. Connection coefficients, matchings, maps and combinatorial conjectures for Jack symmetric functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 348, N° 3, pp. 873–892, 1996.

[HLW 06] **S. Hoory, N. Linial et A. Wigderson**. Expander graphs and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 43, N° 4, pp. 439–562, 2006.

[IO 02] **V. Ivanov et G. Olshanski**. Kerov's central limit theorem for the Plancherel measure on Young diagrams. In : *Symmetric functions 2001 : surveys of developments and perspectives*, pp. 93–151, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.

[Jac 70] **H. Jack**. A class of symmetric polynomials with a parameter. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh Sect. A. Math. Phys. Sci.*, Vol. 69, pp. 1–18, 1970.

[Jac 88] **D. M. Jackson**. Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group. *J. Comb. Th. Ser. A*, Vol. 49, N° 2, pp. 363–369, 1988.

[Ker 96] **S. V. Kerov**. The asymptotics of interlacing sequences and the growth of continual Young diagrams. *J. Math. Sci.*, Vol. 80, N° 3, pp. 1760–1767, 1996.

[Ker 00] **S. V. Kerov**. Anisotropic Young diagrams and Jack symmetric functions. *Func. Anal. Appl.*, Vol. 34, N° 1, pp. 41–51, 2000.

[KO 94] **S. V. Kerov et G. I. Olshanski**. Polynomial functions on the set of Young diagrams. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, Vol. 319, N° 2, pp. 121–126, 1994.

[KV 77] **S. Kerov et A. Vershik**. Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 18, pp. 527–531, 1977.

[KS 97] **F. Knop et S. Sahi**. A recursion and a combinatorial formula for Jack polynomials. *Inv. Math.*, Vol. 128, N° 1, pp. 9–22, 1997.

[LZ 04] **S. K. Lando et A. K. Zvonkin**. *Graphs on surfaces and their applications*. Vol. 141 dans *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.

[Las 08] **M. Lassalle**. A positivity conjecture for Jack polynomials. *Math. Res. Letters*, Vol. 15, pp. 661–681, 2008.

[Las 09] **M. Lassalle**. Jack polynomials and free cumulants. *Adv. Math.*, Vol. 222, N° 6, pp. 2227–2269, 2009.

[LS 77] **B. F. Logan et L. A. Shepp**. A variational problem for random Young tableaux. *Adv. Math.*, Vol. 26, N° 2, pp. 206–222, 1977.

[Mac 95] **I. Macdonald**. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Univ. Press, Oxford, second Ed., 1995.

[Mél 11] **P.-L. Méliot**. A central limit theorem for the characters of the infinite symmetric group and of the infinite Hecke algebra. 2011. preprint arXiv :1105.0091.

[MRŚ 10] **C. Moore, A. Russell et P. Śniady**. On the impossibility of a quantum sieve algorithm for graph isomorphism. *SIAM J. Comp.*, Vol. 39, N° 6, pp. 2377–2396, 2010.

[Oko 00] **A. Okounkov**. Random matrices and random permutations. *Internat. Math. Res. Notices*, Vol. 2000, N° 20, pp. 1043–1095, 2000.

[Rat 08] **A. Rattan**. Stanley's character polynomials and coloured factorizations in the symmetric group. *J. Comb. Th. Ser. A*, Vol. 114, N° 4, pp. 535–546, 2008.

[Rob 38] **G. d. B. Robinson**. On the representations of S_n. *Amer. J. Math.*, Vol. 60, pp. 745–760, 1938.

[Sag 01] **B. Sagan**. *The symmetric group : representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Springer, New York, second Ed., 2001.

[Sch 61] **C. Schensted**. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canad. J. Math.*, Vol. 13, N° 2, pp. 179–191, 1961.

[Sta 72] **R. P. Stanley**. *Ordered structures and partitions*. Vol. 119 dans *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1972.

[Sta 99] **R. P. Stanley**. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2 dans *Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[Sta 03] **R. P. Stanley**. Irreducible symmetric group characters of rectangular shape. *Sém. Lothar. Comb.*, Vol. B50d, 2003. 11 pp. (electronic).

[Sta 06] **R. P. Stanley**. A conjectured combinatorial interpretation of the normalized irreducible character values of the symmetric group. 2006. preprint arXiv :math.CO/0606467.

[S^+ 13] **W. Stein *et al***. *Sage Mathematics Software (Version 5.7)*. The Sage Development Team, 2013. `http://www.sagemath.org`.

[TT 00] **L. N. Trefethen et L. M. Trefethen**. How many shuffles to randomize a deck of cards ? *Proc. Royal Soc. London. Ser. A : Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 456, pp. 2561–2568, 2000.

[Voi 86] **D. Voiculescu**. Addition of certain noncommuting random variables. *J. Funct. Anal.*, Vol. 66, N° 3, pp. 323–346, 1986.

Index

S

T

Index des notations

N° d’édition : mrm2-p-2
Dépôt Légal : juillet 2016
Achevé d’imprimer : juillet 2016

Imprimé en France par

AQUIPRINT

33520 Bruges
www.impression-edition-gironde.com