Le Théorème de Choquet
Représentation intégrale dans les cônes convexes

Valentin Feray & Louis Verrier
sous la direction de Philippe Biane

24 juin 2004

Table des matières

1 Introduction

Le but de cet exposé est d'établir des théorèmes de représentation intégrale, c'est-à-dire qu'ils permettent d'écrire les éléments d'un certain ensemble sous la forme d'intégrales sur des points particuliers.

On s'appuiera essentiellement sur un théorème dû à Choquet que l'on exposera dans une première partie. On l'appliquera dans une seconde partie à des cônes convexes de fonctions. On pourra ainsi déterminer une écriture générale des éléments de ces cônes et en déduire des résultats intéressants sur ces fonctions.

2 Théorème de Choquet

2.1 Cas de la dimension finie : Théorème de Minkowski

Dans un espace vectoriel de dimension finie, on a le résultat suivant qui donne une représentation simple des points d'un sous-ensemble convexe compact :

Théorème 2.1.1 (Minkowski). *Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel E de dimension finie. Tout élément de X est un barycentre de points extrémaux de X.*

2.1.1 Nécessité d'étendre la notion de barycentre

On cherche une extension de ce théorème en dimension infinie (dans un espace vectoriel topologique localement convexe E), c'est-à-dire une description des éléments d'un convexe compact dont on connaît les points extrémaux. Il y a un cas où le résultat est connu :

1. Y espace topologique compact séparé ;
2. $C(Y)$ espace des fonctions continues de Y dans $\mathbb{R}$ (espace de Banach pour la norme infinie) ;
3. $E = C(Y)^\star$;
4. $X = \{L \in E : L(1) = 1 = ||L||\}$.

Dans ce cas, on a les résultats suivants :

1. X est un sous-ensemble convexe faiblement compact de E.
2. À tout L de X correspond une unique μ mesure borélienne de probabilité sur Y telle que $L(f) = \int_Y f d\mu$ (théorème de représentation de Riesz).
3. Les points extrémaux de X sont les évaluations en $y \in Y$ (la mesure correspondante est une masse de Dirac).

Conclusion de cet exemple :
À tout point de X on peut associer une unique *mesure de probabilité sur l'ensemble des points extrémaux*, mais si on se limite aux barycentres (mesures portées par un ensemble fini), on n'obtient pas tous les points de X.

2.1.2 Reformulation du théorème

Il faut donc élargir la notion de barycentre à une notion intégrale. Pour cela, on constate que si $\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = x$ avec $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, en notant ε_i la mesure de Dirac au point x_i, alors x est caractérisé par :

pour toute forme linéaire f continue sur E,

$$f(x) = \int_X f d\mu \tag{1}$$

où μ est la mesure de probabilité $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon_i$.

On dira alors que x est ***représenté*** par la mesure μ, ou que x est le ***résultant*** de μ .

Remarques sur cette définition :

1. Une mesure μ donnée représente au maximum un point x.
2. Un point donné est représenté trivialement par la mesure ε_x.
3. Si x est représenté par une mesure μ portée par un sous-ensemble X convexe fermé de E, alors $x \in X$.

Le théorème de Minkowski s'énonce alors :
Si X est un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel de dimension finie, tout élément de X est représenté par une mesure borélienne de probabilité portée par un nombre fini de points extrémaux.

2.2 Énoncé du théorème de Choquet et commentaires

Une généralisation cohérente du théorème de Minkowski s'énonce donc ainsi :

Théorème 2.2.1 (Choquet). *Si X est un sous-ensemble* ***convexe compact*** *d'un espace vectoriel topologique localement convexe E, tout élément de X est* ***représenté par une mesure borélienne de probabilité portée par l'ensemble des points extrémaux de*** *X.*

Trois questions apparaissent alors :

1. L'ensemble des points extrémaux exX est-il borélien ?
2. Y a-t-il un lien avec le théorème de Krein-Milman, qui est une autre généralisation en dimension infinie du théorème de Minkowsky ?
3. Toute mesure borélienne de probabilité sur X admet-elle un résultant ?

2.2.1 Restriction au cas X métrisable

On essaie de représenter tout point x de X par une mesure μ sur X telle que :

$$\mu(X \backslash exX) = 0$$

Pour que cette assertion ait un sens, il faut donc que exX soit borélien. Or ce n'est pas le cas en général, mais c'est vrai si X est métrisable. On se limitera donc au cas où X est métrisable, qui est largement suffisant pour démontrer la plupart des applications.

Proposition 2.2.2. *Si X est un sous-ensemble convexe compact métrisable d'un espace vectoriel topologique, alors exX est borélien (plus précisément, c'est une intersection dénombrable d'ouverts).*

Preuve : En effet, on a la formule :

$$X \backslash exX = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \frac{y+z}{2}, \text{ où } y, z \in X \text{ vérifient } d(y,z) \geq \frac{1}{n} \right\}}_{\text{fermé de X}} \tag{2}$$

Remarque 2.2.3. Le théorème de Choquet est aussi vrai dans le cas non métrisable, en définissant la notion de "mesure sur X portée par S" par "mesure nulle sur tous les ensembles fermés inclus dans $X \backslash S$" mais on n'étudiera pas ce cas dans cet exposé.

2.2.2 Comparaison avec le théorème de Krein-Milman

Une autre description des sous-ensembles convexes compacts d'un e.v.t.l.c est donnée par l'énoncé suivant :

Théorème 2.2.4 (Krein-Milman). *Sous les hypothèses du théorème de Choquet, X est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

Remarque 2.2.5. L'enveloppe convexe fermée d'un ensemble Y, c'est-à-dire le plus petit convexe fermé contenant Y, est aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe de Y.

On va voir que ce résultat est plus faible que le théorème de Choquet, car il équivaut seulement à l'existence en tout point $x \in X$ d'une mesure de probabilité représentant x portée par **l'adhérence** des points extrémaux de X. Dans le cas où X est métrisable, ceci découle du lemme suivant :

Lemme 2.2.6. *Soit Y un sous-ensemble compact d'un evtlc E, dont l'enveloppe convexe fermée X est métrisable. Un point x de E est dans l'enveloppe X de Y si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ portée par Y représentant x.*

Preuve : Si $x \in X$, il existe une suite de points $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers x, barycentres de points de Y et donc représentés chacun par une mesure μ_n portée par Y. Or, par le théorème de Riesz, l'ensemble des mesures de probabilité sur Y peut être identifié à un sous ensemble $\star$-faiblement compact de $C(Y)^\star$. $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet donc un point d'accumulation μ, qui représente alors x.

Ce théorème a l'avantage de ne pas faire intervenir la notion de mesure représentant un point, et il suffit pour certaines applications comme le théorème de Bernstein

sur les fonctions complètement monotones (§2.1), bien qu'il ne donne pas une description explicite des points de l'ensemble.
Son principal inconvénient est que, pour obtenir la compacité de X, on munira souvent les e.v.t considérés de topologies possédant peu d'ouverts (par exemple la topologie faible employée au §1.1.2), et donc où l'adhérence de exX peut contenir beaucoup d'éléments non extrémaux.

2.2.3 Existence d'un point représenté par une mesure donnée

Pour décrire X comme l'ensemble des points représentés par μ, μ décrivant l'ensemble des mesures de probabilité portées par exX, il faut se poser la question de l'existence d'un point représenté par une telle mesure quelconque.

Proposition 2.2.7. *Soit X un sous-ensemble convexe compact d'un e.v.t.l.c E et μ une mesure de probabilité sur X. Alors μ admet un unique résultant $x \in X$.*

Preuve : On veut montrer qu'il existe un $x \in X$ tel que, pour toute f dans $E^\star$ on ait :

$$\mu(f) \overset{\text{déf}}{:=} \int_X f d\mu = f(x) \tag{3}$$

Par compacité de X, il suffit de voir que c'est vrai pour toute famille finie $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ de $E^\star$.
On définit alors :

$$T : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}^n \\ y & \mapsto & \big(f_1(y), f_2(y), \dots, f_n(y)\big) \end{array}$$

T étant linéaire et continue, $T(X)$ est convexe compact (car X l'est). On veut montrer que $p = \big(\mu(f_1), \mu(f_2), \dots, \mu(f_n)\big)$ appartient à $T(X)$. Si ce n'est pas le cas, par le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire qui les sépare. Autrement dit on peut trouver $a = \big(a_1, a_2, \dots, a_n\big) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\langle a, p \rangle > \sup_{y \in X} \langle a, Ty \rangle$$

ce qui peut se réécrire :

$$\int_X g d\mu > \sup_{y \in X} g(y) \qquad \text{où} \quad g = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i.$$

μ étant une mesure de probabilité, on a une contradiction.

Remarque 2.2.8. On peut montrer que la fonction qui à μ associe son résultant est $\star$-faiblement continue de $C(X)^\star$ dans X.

2.3 Démonstration du théorème

On se donne un sous-ensemble convexe compact X d'un e.v.t.l.c E, et un point $x_0 \in X$. On cherche une mesure μ qui le représente.

2.3.1 Comment construire une mesure adaptée ?

L'idée est d'utiliser le théorème de représentation de Riesz. On cherche donc à construire une forme linéaire positive m sur $C(X)$. La condition :

$$\forall f \in E^\star, \quad \mu(f) = f(x_0) \tag{4}$$

devient : "pour toute f dans $C(X)$, restriction à X d'une forme linéaire sur E, alors $m(f) = f(x_0)$".
Pour ne pas avoir à considérer des restrictions, on élargit cette classe de fonctions à l'ensemble A des fonctions affines continues sur X. On cherchera donc une forme linéaire positive m vérifiant :

$$\forall f \in A, \quad m(f) = f(x_0) \tag{5}$$

La difficulté est de prolonger cette forme linéaire à tout $C(X)$ de façon à ce que la mesure correspondante soit portée par les points extrémaux de X. L'idée est alors de voir que, en dimension finie, si on prend une fonction f strictement convexe et un $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\max_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1 \\ \alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n = x}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \text{ est atteint en } (x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow x_i \text{ points extrémaux} \tag{6}$$

Donc, intuitivement, si m associe à une fonction strictement convexe le maximum de cette somme, alors la mesure μ correspondante sera portée par des points extrémaux. Or, la métrisabilité de X impose l'existence d'une fonction strictement convexe sur X. En effet, il suffit de poser :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} {h_n}^2 \tag{7}$$

où $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de fonctions affines de norme 1 qui séparent les points de X (par exemple, une famille dense dans la sphère unité de A, dont l'existence est donnée par la séparabilité de $C(X)$).
On va maintenant construire l'image par m de cette fonction f, en introduisant le concept d'enveloppe supérieure d'une fonction.

2.3.2 Enveloppe supérieure

Définition 2.3.1. Si f est une fonction bornée, on introduit son enveloppe supérieure $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\bar{f}(x) = \inf\{h(x) : h \in A \text{ et } h \geq f\} \tag{8}$$

On utilisera les propriétés suivantes :

1. $\bar{f}$ est concave, bornée et semi-continue supérieurement (donc borélienne) ;
2. $f \leq \bar{f}$ avec égalité si et seulement si f est concave et semi-continue supérieurement ;

3. si f et g sont bornées, alors :

$$\begin{array}{lllcl} & & \overline{f+g} & \leq & \bar{f}+\bar{g} \\ & & |\bar{f}-\bar{g}| & \leq & ||f-g|| \\ \text{si} & g \in A, & \overline{f+g} & = & \bar{f}+g \\ \text{si} & r>0, & \overline{rf} & = & r\bar{f} \end{array} \tag{9}$$

Ces résultats sont des conséquences faciles de la définition (8).
On remarque que, dans le cas de la dimension finie, la valeur $\bar{f}(x_0)$ est supérieure au maximum considéré au (6). De plus, toute forme linéaire m vérifiant (5) et ayant en f une valeur strictement supérieure à $\bar{f}(x_0)$ ne peut être positive. On va donc essayer de construire m positive telle que :

$$m(f) = \bar{f}(x_0) \tag{10}$$

2.3.3 Fin de la démonstration

1. Construisons la forme linéaire m :
D'après les remarques (5) et (10), m doit être un prolongement de la forme linéaire :

$$n: \begin{array}{rcl} A+\mathbb{R}f & \to & \mathbb{R} \\ h+rf & \mapsto & h(x_0)+r\bar{f}(x_0) \end{array} \tag{11}$$

Or cette application est majorée en tout point par la fonction convexe :

$$p: \begin{array}{rcl} C(X) & \to & \mathbb{R} \\ g & \mapsto & \bar{g}(x_0) \end{array} \tag{12}$$

Les propriétés de convexité de p et de majoration de n par p découlent de l'énoncé (9) :
- si $r \geq 0$, $h+r\bar{f} = \overline{h+rf}$ donc $n(h+rf) = p(h+rf)$;
- si $r < 0$, $h+rf$ est concave donc égale à son enveloppe supérieure, et $p(h+rf) = h+rf \geq h+r\bar{f}$ car $f \leq \bar{f}$.

On peut donc prolonger n en une forme linéaire m sur $C(X)$ telle que :

$$\forall g \in C(X), m(g) \leq \bar{g}(x_0) \tag{13}$$

2. Montrons que m est positive et continue :
Soit g une fonction continue positive sur X. On a :

$$-m(g) = m(-g) \leq \overline{(-g)}(x_0) \leq 0$$

donc m est positive. La continuité découle alors de $m(1) = 1$ car :

$$-||g|| = m(-||g||) \leq m(g) \leq m(||g||) = ||g||$$

Par le théorème de représentation de Riesz, il esiste une mesure μ borélienne positive régulière telle que :

$$\forall f \in C(X),\ m(f) = \int_X f d\mu \tag{14}$$

3. Montrons que μ vérifie les conditions voulues :
μ est bien une mesure de probabilité car :

$$\mu(1) = m(1) = 1$$

Prouvons maintenant que μ est portée par l'ensemble

$$\Gamma \overset{\text{déf}}{:=} \{x \in X : f(x) = \bar{f}(x)\} \tag{15}$$

et que ce dernier est contenu dans exX.
Pour tout h dans A tel que $h \geq f$, alors $h \geq \bar{f}$ donc :

$$h(x_0) = m(h) = \mu(h) \geq \mu(\bar{f})$$

Alors, par définition de $\bar{f}$ (8), $\bar{f}(x_0) \geq \mu(\bar{f})$, soit :

$$\mu(f) \geq \mu(\bar{f})$$

Comme μ est positive et que $f \leq \bar{f}$, μ est portée par l'ensemble Γ.
Pour prouver l'inclusion de Γ dans l'ensemble des points extrémaux de X, considérons un point x qui s'écrit $\frac{1}{2}(y+z)$. On a alors :

$$f(x) \leq \frac{1}{2}\big[f(y) + f(z)\big] \leq \frac{1}{2}\big[\bar{f}(y) + \bar{f}(z)\big] \leq \bar{f}(x)$$

avec égalité si et seulement si $x = y = z$ car f est strictement convexe.
4. Conclusion :
La mesure μ ainsi construite est donc une mesure borélienne de probabilité, portée par l'ensemble des points extrémaux de X, et représentant x.

3 Exemples de représentation intégrale

Nous présentons ici deux applications du théorème de Choquet à la représentation intégrale de certains types de fonctions. Le difficulté principale est la détermination de l'ensemble des points extrémaux d'un certain ensemble convexe.

3.1 Fonctions complètement monotones

Pour $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $h > 0$, on note $\Delta_h f$ la fonction $x \mapsto f(x+h) - f(x)$.

Définition 3.1.1. Une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est dite complètement monotone si :

$$(-1)^k . \Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_n} f \geq 0 \tag{16}$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $h_1, ..., h_n \in \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction complètement monotone est positive et décroissante.

Théorème 3.1.2 (Bernstein). *Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est complètement monotone ;

(ii) Il existe une mesure positive μ sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \mu(dt) \tag{17}$$

(iii) f est indéfiniment dérivable, et $(-1)^k . f^{(k)} \geq 0$ pour tout $k \geq 0$.

La partie importante du théorème est l'implication $(i) \Rightarrow (ii)$: on obtient une représentation intégrale simple des fonctions complètement monotones.

Preuve : On pose C l'ensemble des fonctions complètement monotones ; c'est un cône convexe fermé saillant de $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence simple. On pose $K = \{f \in C : \|f\|_\infty = f(0^+) \leq 1\}$.

1. K est convexe.
2. K est compact : $K = \bigcap_{x \in \mathbb{R}_+^*} \{f \in C : f(x) \leq 1\}$ est fermé dans $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$. De plus, $K \subset [0,1]^{R_+^*}$ qui est compact par le théorème de Tychonov.
3. K est métrisable : si $f \in C$, f est convexe donc continue. Donc l'ensemble des $f \to f(r)$, pour $r \in \mathbb{Q}_+^*$, sépare C. Si $\mathbb{Q}_+^* = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$, on pose :

$$d(f,g) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|(f-g)(r_n)|}{1 + |(f-g)(r_n)|}.$$

   On vérifie que cette distance est compatible avec la topologie de la convergence simple sur K.

On peut donc appliquer le théorème de Choquet à K.
Il reste à trouver les éléments extrémaux de K. Si $f \in K$ est non nulle et extrémale, elle vérifie $f(0^+) = 1$. Soit $h > 0$:

- si $f(h) = 0$, alors $f(x+h) = 0 = f(x)f(h)$;

- si $f(h) = 1$, alors la fonction $x \mapsto f(x) - f(x+h)$ est complètement monotone et s'annule en 0, donc elle est nulle : $f(x+h) = f(x) = f(x)f(h)$;

- si $0 < f(h) < 1$, on a :

$$f(x) = f(h)\big[\frac{f(x+h)}{f(h)}\big] + \big(1 - f(h)\big)\big[\frac{f(x) - f(x+h)}{1 - f(h)}\big] \tag{18}$$

Les deux termes entre crochets appartenant à K, ils sont égaux à f. On a donc $f(x+h) = f(x)f(h)$.
f est positive, décroissante et continue donc :

$$\exists t \geq 0 : f(x) = e^{-tx}$$

Le théorème de Choquet nous donne, pour toute $f \in K$, une mesure de probabilité sur exK de résultant f, mesure qu'on transpose sur l'ensemble des exponentielles décroissantes, puis sur $\mathbb{R}_+$.
Si $f \in C$ est bornée, $\frac{f}{f(0^+)} \in K$ donc on peut représenter f par une mesure μ, dont on montre qu'elle est unique (par le théorème de Stone-Weierstrass). Le passage aux fonctions non bornées se fait aisément.

Corollaire 3.1.3. *Si $f :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ est indéfiniment dérivable et absolument monotone, c'est-à-dire si $f^{(k)} \geq 0$ pour tout $k \geq 0$, alors il existe π mesure positive sur $[0, +\infty[$ telle que :*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{tx} \pi(dt)$$

3.2 Théorie des chapeaux

Il s'agira dans ce paragraphe d'étendre le théorème de représentation de Choquet à des cônes convexes fermés saillants. On a eu un aperçu de ce type d'extension dans le cas particulier des fonctions complètement monotones : on a appliqué le théorème de Choquet à un sous-ensemble convexe compact du cône pour obtenir la forme générale des éléments de cet ensemble, puis on a étendu le résultat au cône entier.

Dans toute cette partie, on notera P un cône convexe fermé saillant d'un e.v.t.l.c E.

3.2.1 Cas simple : existence d'une base convexe compacte

Définition 3.2.1. Un rayon de P est un ensemble de la forme $\mathbb{R}_+ x$, pour $x \in P \backslash 0$.

Une base B de P est un sous-ensemble de P ne contenant pas 0 et coupant tous les rayons de P en exactement un point.

Supposons dans ce paragraphe que P possède une base B convexe compacte. On cherche une représentation intégrale des points de P. Il est naturel pour cela d'appliquer le théorème de Choquet à B, et donc de s'intéresser à ses points extrémaux.
Considérons donc un point extrémal x de B. On a :

$$\begin{array}{rll}
\forall y,z\in P \text{ tels que} & x=y+z, & \\
\text{on écrit} & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \lambda y_0 \\ z & = & \mu z_0 \end{array}\right. & \lambda,\mu\in\mathbb{R}_+ \text{ et } y_0,z_0\in B\ ; \\
\text{alors} & \frac{x}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}y_0+\frac{\mu}{\lambda+\mu}z_0\in B, & \text{donc} \quad \lambda+\mu=1, \\
\text{et} & x=y_0=z_0, & \\
\text{ce qui signifie} & y,z\in\mathbb{R}_+x. &
\end{array}$$

Ceci inspire la définition suivante :

Définition 3.2.2. Un rayon ρ du cône P est appelé rayon extrémal de P si aucun point de ρ ne peut s'écrire comme barycentre à coefficients strictement positifs de points de $P\backslash\rho$.
On notera $exrP$ l'union des rayons extrémaux de P.

On a les propriétés immédiates :

1. $exB=B\cap exrP$;
2. $x\in exrP \Longleftrightarrow \forall y,z\in P, \big[x=y+z\Rightarrow y,z\in\mathbb{R}_+x\big]$.

La deuxième propriété est utile pour le calcul des rayons extrémaux. La première permet d'établir l'énoncé suivant :

Théorème 3.2.3. *Supposons que P possède une base convexe compacte métrisable. Soit x un élément de P. Alors :*
(i) x est représenté par une mesure de probabilité portée par $exrP$;
(ii) x est représenté par une mesure finie portée par exB.

Preuve : Si $x\in P$, alors $x=\lambda x_0, x_0\in B, \lambda\in\mathbb{R}_+$. On sait que x_0 est représenté par une mesure de probabilité μ_0 portée par exB ; x est donc représenté par la mesure image de μ_0 par :

$$\begin{array}{rcl} exB & \to & exrP \\ t & \mapsto & \lambda t \end{array}$$

De plus, x est aussi représenté par la mesure $\lambda\mu_0$ portée par exB.

Ce théorème nous donne la représentation intégrale cherchée. Cependant, l'existence d'une base convexe compacte est une hypothèse très forte (elle n'est pas réalisée dans la plupart de nos exemples). Le but du paragraphe suivant est d'affaiblir cette hypothèse tout en conservant le résultat du théorème.

3.2.2 Généralisation grâce aux chapeaux

L'idée est que le raisonnement ci-dessus fonctionne encore si B est un sous-ensemble convexe compact métrisable de P, générateur de P, dont les éléments extrémaux sont sur les rayons extrémaux de P. C'est le cas des ensembles que l'on introduit dans la définition suivante :

Définition 3.2.4. Si P est un cône convexe fermé saillant, un sous-ensemble non vide C de P est appelé chapeau de P si C est convexe, compact, et si $P \backslash C$ est convexe. Un chapeau C est dit universel si $P = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+} \lambda C$.

Proposition 3.2.5. *Si C est un chapeau de P, et si x est un point extrémal de C, alors x appartient à un rayon extrémal de P.*

Preuve : Soit x un point extrémal de C. On écrit $x = \frac{1}{2}(y+z)$, $y, z \in P$. L'hypothèse de convexité de $P \backslash C$ implique que y ou z appartient à C. On supposera par exemple $y \in C$. On pose alors :

$$\lambda_0 = max\{\lambda : \lambda y \in C\} < \infty$$

et on écrit pour $\lambda > \lambda_0 \geq 1$:

$$x = \frac{1}{2\lambda}(\lambda y) + \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{2\lambda - 1} z\right)$$

x est alors écrit comme barycentre de deux points dont le premier n'est pas dans C. Donc $\forall \lambda > \lambda_0$, $\left(\frac{\lambda}{2\lambda-1} z\right) \in C$. C étant fermé, c'est vrai pour $\lambda = \lambda_0$ et x s'écrit comme barycentre de deux points de C :

$$x = \frac{1}{2\lambda_0}(\lambda_0 y) + \left(1 - \frac{1}{2\lambda_0}\right)\left(\frac{\lambda_0}{2\lambda_0 - 1} z\right)$$

Comme x est un point extrémal de C, y et z sont bien proportionnels à x.

Théorème 3.2.6 (dû à Choquet). *Supposons que P possède un chapeau universel métrisable. Soit x un élément de P. Alors :*

(i) x est représenté par une mesure de probabilité portée par $exrP$;

(ii) x est représenté par une mesure finie portée par exB.

3.3 Fonctions de type positif

Définition 3.3.1. Soit G un groupe abélien, et f une fonction à valeurs complexes sur G. On dit que f est de type positif si pour toute famille finie $(x_i)_{i \in I}$ de points de G, on a les conditions équivalentes suivantes :

(i) pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ de nombres complexes :

$$\sum_{i,j \in I} \alpha_i \bar{\alpha_j} f(x_i - x_j) \in \mathbb{R}_+ \tag{19}$$

(ii) la matrice $\big(f(x_i - x_j)\big)_{i,j \in I}$ est hermitienne positive.

Remarque 3.3.2. Si on introduit les mesures dicrètes $\mu = \sum_{i\in I} \alpha_i \varepsilon_{x_i}$ et $\tilde{\mu} = \sum_{i\in I} \bar{\alpha}_i \varepsilon_{-x_i}$, on peut réécrire la condition (19) comme :

$$\sum_{i,j\in I} \alpha_i \bar{\alpha_j} f(x_i - x_j) = (\mu * \tilde{\mu})(f) = (\mu * \tilde{\mu} * \check{f})(0) \geq 0 \tag{20}$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour toute mesure discrète μ, ce qui équivaut à la condition :

$$\text{Pour toute mesure discrète } \mu, \quad (\mu * \tilde{\mu} * f)(0) \geq 0.$$

En particulier, si on pose $\mu = \varepsilon_0 + c.\varepsilon_x$, on obtient :

$$(1 + |c|^2)f(0) + cf(x) + \bar{c}f(-x) \geq 0,$$

ce qui nous donne, pour certaines valeurs de c, les relations :

$$f(0) \geq 0, f(-x) = \overline{f(x)} \text{ et } |f(x)| \leq f(0). \tag{21}$$

Définition 3.3.3. Soit $f : G \to \mathbb{C}$. On dit que f est un caractère de G si f est bornée, non nulle et si :

$$\forall x, y \in G, f(x + y) = f(x)f(y).$$

Soit f un caractère. On a clairement $f(0) = 1$, $|f(x)| = 1$ et $f(-x) = \overline{f(x)}$. Donc :

$$\sum_{i,j\in I} \alpha_i \bar{\alpha}_j f(x_i - x_j) = \sum_{i\in I} \alpha_i f(x_i).\overline{\sum_{j\in I} \alpha_j f(x_j)} \geq 0$$

et f est de type positif.

3.3.1 Cas G discret

Dans cette partie, on supposera G fini ou dénombrable.
On pose K l'ensemble des caractères de G, et P l'ensemble des fonctions de type positif : c'est un cône convexe fermé saillant de $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$. On pose finalement $P_1 = \{f \in P, f(0) = 1\}$.
P_1 est une base de P, elle est clairement compacte et métrisable, car $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ est métrisable.

Lemme 3.3.4. *$exP_1 \subset K$.*

En effet, si $f \in exP_1$ et λ est une mesure discrète sur G, on pose $g_\lambda = \lambda * \tilde{\lambda} * f$. On a :

$$(\mu * \tilde{\mu} * g_\lambda)(0) = ((\lambda * \mu) * \widetilde{(\lambda * \mu)} * f)(0) \geq 0$$

donc g_λ est de type positif.
Pour $\lambda_1 = \varepsilon_0 + c.\varepsilon_a$ et $\lambda_2 = \varepsilon_0 - c.\varepsilon_a$, on obtient :

$$\begin{cases} g_{\lambda_1} + g_{\lambda_2} & = 2(1 + |c|^2)f \\ g_{\lambda_1} - g_{\lambda_2} & = 2(c\varepsilon_a * f + \bar{c}\varepsilon_{-a} * f) \end{cases}$$

Donc g_{λ_1} et g_{λ_2} sont proportionnels à f (car $f \in exrP$), et pour certaines valeurs de c, il en découle que $\varepsilon_{-a} * f$ est proportionnel à f :

$$\forall x \in G, f(x+a) = z_a f(x)$$

Or $f \in P_1$ donc $z_a = \frac{f(a)}{f(0)} = f(a)$. f est donc un caractère.

Théorème 3.3.5 (Bochner-Weil - Cas discret). *Soit $f : G \to \mathbb{C}$ une fonction de type positif. Alors il existe une mesure positive finie π sur K telle que :*

$$f(x) = \int_K k(x)\pi(dk) \tag{22}$$

Preuve : Le théorème de Choquet nous donne une mesure positive finie π sur exP_1 de résultant f, que l'on prolonge à K. Or la fonction $l_x : g \mapsto g(x)$ est linéaire continue sur $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ donc on obtient :

$$f(x) = l_x(f) = \int_K l_x(k)\pi(dk) = \int_K k(x)\pi(dk)$$

3.3.2 Cas $G = \mathbb{R}^n$

On suppose $G = \mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble K des caractères *continus* de G est :

$$K = \{x \mapsto e^{it\cdot x}, t \in \mathbb{R}^n\} \tag{23}$$

Si μ est une mesure positive finie sur K, la fonction $f_\mu : x \mapsto \int_K k(x)\mu(dk)$ est clairement continue et de type positif.

Nous voulons montrer que toutes les fonctions continues de type positif sont de la forme f_μ. La difficulté réside en ce que le cône des fonctions de type positif n'a pas de base compacte pour les topologies usuelles. Nous utiliserons donc le fait que la boule unité $\overline{B}$ de $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ est métrisable et compacte pour la topologie faible $\sigma(L^\infty, L^1)$.

On étudie donc désormais les fonctions de L^∞ de type positif ; la définition 3.3.1 n'a aucun sens si on ne considère pas un représentant particulier. Il faut donc définir correctement ce concept.

On dit que $f \in L^\infty$ est continu s'il admet un représentant continu (qui est alors unique).

Pour $\alpha : G \to \mathbb{C}$, on définit $\tilde{\alpha} : x \mapsto \overline{\alpha(-x)}$.

Définition 3.3.6. On dit que $f \in L^\infty$ est de type positif s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) $\forall \alpha \in L^1, (\alpha * \tilde{\alpha})(f) = \int f(x).(\alpha * \tilde{\alpha})(x)dx = (\alpha * \tilde{\alpha} * \check{f})(0) \geq 0$

(ii) $\forall \alpha \in L^1, (\alpha * \tilde{\alpha} * f)(0) \geq 0$.

On note P l'ensemble des éléments de L^∞ de type positif : c'est un cône convexe fermé saillant de L^∞.

Justification : Si $f \in L^\infty$ est continue, les deux définitions de la propriété "f

est de type positif" coïncident.
En effet, si $f \in P$ et μ est une mesure discrète, μ est limite étroite d'une suite de mesures à densité continue α_n et à support dans un compact fixe ; donc les relations $(\alpha_n * \widetilde{\alpha_n})(f) \geq 0$ entraînent $(\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0$.
Inversement, si la relation $(\mu * \tilde{\mu})(f) \geq 0$ est vérifiée pour toute mesure discrète μ, elle l'est aussi pour toute mesure bornée (car f est bornée), donc en particulier pour toute mesure de densité $\alpha \in L^1$.

On pose $Q = P \cap \overline{B}(0,1)$, convexe compact de L^∞.

Lemme 3.3.7. *L'application $f \mapsto ||f||_\infty$ est linéaire sur P. Par conséquent, Q est un chapeau de P.*

Remarque 3.3.8. Si on restreint cette application à l'ensemble des $f \in L^\infty$ continus, elle coïncide avec l'application $f \mapsto f(0)$ et est donc bien linéaire.

Preuve : Si $f \in P$ et $\alpha \in L^1$, la fonction $\alpha * \tilde{\alpha} * f$ est continue et dans P, et l'application $f \mapsto (\alpha * \tilde{\alpha} * f)(0)$ est linéaire.
Soit (α_n) une suite de fonctions positives de L^1 telles que $||\alpha_n||_1 = 1$, et qui converge au sens des distributions vers δ_0. On a :

$$||\alpha_n * \widetilde{\alpha_n} * f||_\infty = (\alpha_n * \widetilde{\alpha_n} * f)(0) \leq ||f||_\infty.$$

De plus, la suite $\alpha_n * \widetilde{\alpha_n} * f$ converge vers f pour $\sigma(L^\infty, L^1)$. On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} ||\alpha_n * \widetilde{\alpha_n} * f||_\infty = ||f||_\infty$$

car sinon, on aurait une sous-suite $(\alpha_{\phi(n)})$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} ||\alpha_{\phi(n)} * \widetilde{\alpha_{\phi(n)}} * f||_\infty \leq \rho < ||f||_\infty,$$

mais comme $\overline{B}(0,\rho)$ est faiblement fermée, on aurait $||f||_\infty \leq \rho$.
Donc $|| \; ||_\infty$, limite d'applications linéaires sur P, est linéaire sur P.

Lemme 3.3.9. *Si $f \in exrP$ vérifie $||f||_\infty = 1$, alors f est un caractère continu de G.*

Preuve : On montre, comme dans le cas G discret (Lemme 3.3.4), que si $a \in G$, $\varepsilon_a * f$ est proportionnel à f :

$$\varepsilon_a * f = z_a f$$

Comme $f \neq 0$, il existe α continue à support compact telle que $g = f * \alpha$ soit continue et non nulle. On a alors $\varepsilon_a * g = z_a . g$, donc $g(0) \neq 0$. Par conséquent, $h = \frac{g}{g(0)}$ est un caractère continu.
On a $\forall a \in G, |z_a| = |h(a)| = 1$ donc $\frac{f}{h} \in L^\infty$. On obtient donc :

$$\varepsilon_a * (\frac{f}{h}) = \frac{\varepsilon_a * f}{\varepsilon_a * h} = \frac{z_a f}{z_a h} = \frac{f}{h}$$

donc f est proportionnel à h, et f est continu. On a alors $f(0) = ||f||_\infty = 1$ donc $f = h$ est un caractère continu.

Théorème 3.3.10 (Bochner-Weil - Cas $G = \mathbb{R}^n$). *Pour toute $f \in P$, f est continue et il existe une mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\forall x \in G, f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot x}\mu(dt) \tag{24}$$

Preuve : Les éléments extrémaux non nuls de Q sont des élements de $exrP$ et vérifient $||f||_\infty = 1$; on a donc $exQ \subset K \cup \{0\}$. D'après le théorème de Choquet, tout $f \in P$ est représenté par une mesure positive finie portée par $K \cup \{0\}$, donc par une mesure positive finie ν portée par K (car toute mesure portée par 0 a un résultant nul).
En particulier, pour $\alpha \in L^1$, l'application $f \mapsto \int_{\mathbb{C}} f(x)\alpha(x)dx$ est linéaire continue donc :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in L^1,\ \int_{\mathbb{C}} f(x)\alpha(x)dx &= \int_K \Big(\int_{\mathbb{C}} k(x)\alpha(x)dx \Big)\nu(dk) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \Big(\int_K k(x)\nu(dk) \Big)\alpha(x)dx \end{aligned}$$

donc $f(x) = \int_K k(x)\nu(dk)$.

On pose $\phi : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R}^n \\ (x \mapsto e^{it\cdot x}) & \mapsto & t \end{array}$ mesurable.

On a alors :

$$f(x) = \int_K e^{ix\cdot\phi(k)}\nu(dk) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot t}\phi(\nu)(dt).$$

3.4 Quelques résultats sans démonstration

3.4.1 Fonctions absolument monotones sur $\mathbb{R}^n$

On cherche à généraliser le corollaire 3.1.3 aux fonctions absolument monotones sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.4.1. Soit C un cône convexe de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f est C-absolument monotone si :

$$\Delta_{a_1} \dots \Delta_{a_n} f \geq 0$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, ..., a_n \in C$.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions absolument monotones est un cône convexe fermé saillant de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

Théorème 3.4.2. *On suppose que Ω est C-stable, c'est-à-dire que $\Omega - C = \Omega$. Alors :*

1. *Tout élément de $exr\mathcal{A}$ est de la forme $x \mapsto c.e^{l(x)}$ où $c \in \mathbb{R}_+$ et l est une forme linéaire positive sur C.*

2. *Pour toute fonction f absolument monotone, il existe une mesure positive π sur le polaire C^0 de C telle que :*

$$f(x) = \int_{C^0} e^{l(x)} d\pi(l)$$

3. *Toute fonction f est absolument monotone si et seulement si elle est de classe C^∞ et si toutes ses dérivées partielles par rapport à des vecteurs de C sont positives. De plus, ces dérivées partielles sont alors convexes et analytiques.*

En particulier, toute fonction absolument monotone est analytique.

3.4.2 Fonctions harmoniques

L'étude des fonctions harmoniques définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ a été une des principales motivations aux problèmes de représentation intégrale. En effet, l'ensemble P des fonctions harmoniques positives sur Ω est un cône convexe fermé saillant de $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$. De plus, si on fixe $x_0 \in \Omega$, l'ensemble B défini ci-dessous est une base convexe compacte de P :

$$B \stackrel{\text{déf}}{:=} \{h : \Omega \to \mathbb{R} \text{ harmonique positive telle que } h(x_0) = 1\}$$

L'ensemble des points extrémaux de B est connu dans le cas où Ω est le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 (on choisit alors $x_0 = 0$). Il vaut alors :

$$\left\{ P_y : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1-||x||^2}{||y-x||^n} \end{array} \;,\; y \in \mathbb{R}^n \text{ et } ||y|| = 1 \right\}$$

Cet ensemble étant homéomorphe au cercle unité $\mathbb{S}_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, toute fonction harmonique positive sur $\Omega = B(0,1)$ est alors de la forme :

$$h(x) = \int_{\mathbb{S}_{n-1}} P_y(x) d\mu_h(y) \tag{25}$$

où μ_h est une mesure positive finie sur $\mathbb{S}_{n-1}$.

Références

[1] Gustave Choquet, "Deux exemples classiques de représentation intégrale". L'Enseignement Mathématique XV (1969), p. 63-75.

[2] Claude Dellacherie et Paul-André Meyer, "Théorie discrète du potentiel", *Probabilités et potentiel. Chap. IX à XI.* Hermann, Paris (1983).

[3] Robert R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem.* Springer (2001).