

Renormalisation en théorie quantique des champs

Structure mathématique

Valentin Féray
mémoire de M2 encadré par Pierre Cartier

28 septembre 2006

Table des matières

1	Graphes de Feynman	3
1.1	Formalisme	3
1.2	Graphes sans ponts	4
1.3	Nombre de boucles	5
1.4	Table de graphes	5
1.4.1	Méthode d'obtention générale	5
1.4.2	Formule combinatoire	6
1.4.3	Tables	9
2	Groupe algébrique de la renormalisation	9
2.1	Cas des graphes à quatre pattes	9
2.1.1	Opérateur associé à un graphe	9
2.1.2	Groupe de transformations non linéaires	11
2.1.3	Description de la composition	12
2.2	Construction explicite du groupe	13
2.3	Représentation matricielle infinie	14
2.4	Algèbre de Lie et algèbre de Hopf associées	16
2.4.1	Opérateur d'insertion et algèbre de Lie	16
2.4.2	Forêt de sous-graphes divergents et algèbre de Hopf	17
3	Intégrales de Feynman	21
3.1	Flots	21
3.2	Règles de Feynman	24
3.3	Une autre présentation de l'intégrale	26
3.3.1	Paramètres de Schwinger	26
3.3.2	Forme de l'intégrale obtenue	27
3.4	Régularisation dimensionnelle	30

4	Renormalisation	33
4.1	Approche historique	33
4.2	Décomposition de Birkhoff	33
4.2.1	Décomposition multiplicative	33
4.2.2	Comportement dans un groupe algébrique	34
4.3	Algorithme	36
4.3.1	Formulation théorique	36
4.3.2	Point de vue plus calculatoire	37

Introduction

En théorie quantique des champs, les fonctions de Schwinger (reliées de manière directe à la matrice de diffusion \mathcal{S} de la théorie) s'expriment comme une somme infinie d'intégrales. Cette somme est indexée par des objets combinatoires, appelés graphes de Feynman que nous introduisons dans la partie 1. D'un point de vue purement mathématique, ces graphes ont une structure très riche exposée ici dans la partie 2. Malheureusement, l'intégrale, terme général de la somme de la fonction de Schwinger, diverge. La partie 3 présente une forme de cette intégrale. Étant donné que l'on observe en physique expérimentale des valeurs finies, des travaux ont été menés pour tirer de l'intégrale une valeur finie. Miraculeusement l'algorithme proposé se lit facilement grâce à la structure décrite dans la partie 2. Ce lien sera développé dans la dernière partie de ce mémoire.

Remarque 1. Nous regarderons ici le modèle ϕ^4 qui correspond à une approximation en très faible énergie (on ne considère en fait que le terme d'interaction stable le plus simple qui est un monôme de degré 4 en une variable : le champ ϕ) et permet de bien aborder la théorie de la renormalisation.

1 Graphes de Feynman

1.1 Formalisme

Les graphes de Feynman ayant des demi-arêtes extérieures et pouvant avoir des arêtes multiples ou des arêtes ayant le même sommet aux deux extrémités (appelées oreille), nous n'utiliserons pas la description classique des graphes (donnée d'un ensemble de sommets et d'un sous-ensemble de ses parties à deux éléments) mais celle de Manin.

Définition 1.1. Nous appellerons désormais graphe la donnée de :

- un ensemble fini V (noté parfois V_Γ) de sommets ;
- un ensemble fini H de "demi-arêtes" et une application surjective $s : H \rightarrow V$ ($t(h)$ est l'extrémité de h) ;
- un ensemble fini E de parties disjointes à deux éléments de H appelées arêtes.

On notera alors (V, H, E) le graphe (en sous-entendant t) et $H_{\text{ext}} := H \setminus \bigcup_{e \in E} e$.

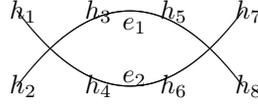
De plus, d'après la remarque 1, nous étudierons le modèle ϕ^4 et on n'appellera

graphes de Feynman vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, |t^{-1}(v)| = 4 & \quad i.e. \text{ De tout sommet partent exactement quatre demi-arêtes} \\ |H_{\text{ext}}| = 0, 2 \text{ ou } 4 & \quad i.e. \text{ Le graphe a exactement } 0, 2 \text{ ou } 4 \text{ pattes externes} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Exemple : } V = \{v_1, v_2\}, H = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H & \rightarrow V \\ s : h_1, h_2, h_3, h_4 & \mapsto v_1, \\ & h_5, h_6, h_7, h_8 \mapsto v_2 \\ E & = \{\{h_3, h_5\}, \{h_4, h_6\}\} \end{aligned}$$



1.2 Graphes sans ponts

De plus, nous ne regarderons que des graphes possédant une certaine propriété appelés graphes 1PI (pour *One particle irreducible*, la dénomination venant de la physique).

Définition 1.2. 1. Un graphe (V, H, E) est dit connexe s'il n'existe pas de partition $V = V_1 \cup V_2$ telle que

$$\forall e = \{h_1, h_2\} \in E, \exists i = 1, 2 \mid t(h_1) \in V_i \text{ et } t(h_2) \in V_i$$

2. Une arête $e \in E$ est appelée pont si (V, H, E) est connexe mais $(V, H, E \setminus \{e\})$ ne l'est pas.
3. Un graphe connexe sans ponts est dit 1PI.
4. Un graphe connexe (V, H, E) est appelé arbre si toutes les arêtes sont des ponts

Remarque 2. Tous les graphes connexes fermés (*i.e.* n'ayant pas de pattes externes) sont 1PI. (pour des raisons de parité).

Désormais, nous ne regarderons que des graphes 1PI. Certains résultats se généralisent grâce au lemme suivant :

Lemme 1.1. *Tout graphe est un arbre de graphes 1PI.*

En effet, il suffit de voir que chaque composante connexe de $(V, H, E \setminus \{\text{ponts}\})$ ne contient pas de ponts. Raisonnons par l'absurde et appelons p ce nouveau pont. Alors $(V, H, E \setminus (\{\text{ponts}\} \cup \{p\}))$ a $|\{\text{ponts}\}| + 2$ composantes connexes. Mais il est obtenu à partir de $(V, H, E \setminus \{p\})$ en coupant $|\{\text{ponts}\}|$ arêtes. Or couper une arête ne peut augmenter le nombre de composantes connexes que de 1. $(V, H, E \setminus \{p\})$ avait au moins deux composantes connexes et p est un pont dans le graphe initial.

1.3 Nombre de boucles

Pour quantifier la taille d'un graphe, on peut regarder le nombre de sommets $|V|$ ou le nombre d'arêtes $|E|$, mais une quantité intéressante est le nombre de boucles donné par $L = |V| - 1/2|H_{\text{ext}}| + 1$. Cette appellation vient du résultat suivant :

Proposition 1.2. *Soit (V, H, E) un graphe connexe vérifiant l'hypothèse (1) et Γ l'espace topologique canoniquement associé. Alors*

$$H_1(\Gamma) = \mathbb{Z}^L. \quad (3)$$

Démonstration : Pour un graphe connexe quelconque, on sait que $\Pi_1(\Gamma)$ est un groupe libre à $|E| - |V| + 1$ générateurs. Cela vient du fait que si T est un arbre maximal (donc couvrant tous les sommets et ayant $|V| - 1$ arêtes), Γ a le même type d'homotopie que Γ/T (car T est contractile et (Γ, T) une paire de CW-complexes) qui est un bouquet de cercles. On a donc

$$H_1(\Gamma) = \mathbb{Z}^{(|E|-|V|+1)}$$

$$\begin{array}{l} \text{Mais} \\ \text{Et donc} \\ \text{Finalement} \end{array} \quad (1) \Rightarrow \begin{cases} |H| = 4|V| \\ |H| = 2|E| + |H_{\text{ext}}| \end{cases}$$

$$|E| + 1/2|H_{\text{ext}}| = 1/2|H| = 2|V|$$

$$|E| - |V| + 1 = |V| - 1/2|H_{\text{ext}}| + 1 = L$$

□

Lien entre les différentes graduations :

$$\begin{aligned} |V| &= L - 1 + \frac{1}{2}|H_{\text{ext}}| \\ |V| &= 2L - 2 + \frac{1}{2}|H_{\text{ext}}| \end{aligned}$$

1.4 Table de graphes

Pour finir cette partie de présentation des graphes, nous allons représenter tous les graphes 1PI avec $L \leq 4$. Obtenir cette classification (et leur nombre d'automorphismes, c.f. 1.4.2) est intéressant car la quantité physique à l'origine de toutes ces questions est une somme sur tous les graphes 1PI.

1.4.1 Méthode d'obtention générale

La première idée est que l'on peut obtenir les graphes ayant 2 ou 4 pattes extérieures à partir de ceux n'en ayant aucune (mais ayant plus de boucles) de la manière suivante :

- Pour les graphes ayant deux pattes extérieures, il suffit de couper une arête.

- Pour les graphes ayant quatre pattes extérieures, on enlève un sommet ou deux arêtes (la deuxième méthode étant meilleure car on part d'un graphe sans pattes extérieures avec seulement $L+2$ boucles, mais on obtient trois fois chaque graphe).

Il faut bien sûr faire attention à ne garder que des graphes 1PI.

Classification des graphes sans pattes externes :

On peut les obtenir de manière récursive. En effet si l'on considère un sommet v d'un graphe fermé avec $L+1$ boucles, on est dans un des trois cas suivants :

1. Il existe une arête dont les deux extrémités sont v . Alors en retirant v et en reliant les deux autres demi-arêtes arrivant sur v , on obtient un graphe fermé avec L boucles. (Visuellement, on supprime une *oreille*).
2. On n'est pas dans le cas 1, mais le graphe privé de v et des demi-arêtes lui arrivant est connexe. Alors, le graphe obtenu en retirant v et en reliant deux à deux les demi-arêtes laissées libres est un graphe fermé à L boucles.
3. On n'est pas dans le cas 1 et le graphe privé de v et des demi-arêtes lui arrivant n'est pas connexe. Si l'on retire v , parmi les quatre demi-arêtes laissées libres, il y en a deux dans chaque composante connexe. En reliant les demi-arêtes de chaque composante connexe ensemble, on obtient deux graphes fermés ayant respectivement l et $L-l$ boucles. (l pouvant prendre des valeurs entre 2 et $L-2$). Si l'on relie autrement ces quatre demi-arêtes, on obtient un graphe fermé à L boucles.

Il suffit ensuite d'effectuer les opérations inverses sur les graphes plus petits. Séparer le cas 3 ne semble pas utile *a priori*, mais son intérêt apparaît avec la formule du paragraphe suivant.

1.4.2 Formule combinatoire

Notations :

- Pour Γ un graphe, $s(\Gamma)$ est le nombre de permutations de H laissant deux partitions invariantes : $\{t^{-1}(v), v \in V\}$ et $E \cup \{\{h\}, h \in H_{\text{ext}}\}$ (c'est le nombre d'automorphismes du graphe).

- $\binom{L}{0} = \sum_{\Gamma} \frac{\Gamma}{s(\Gamma)}$, la somme étant effectuée sur tous les graphes fermés Γ à L boucles. C'est un élément de $\mathbb{Q}[\Gamma]_{\Gamma \text{ graphes fermés}}$

Exemple : $\binom{2}{0} = \frac{1}{8} \bigcirc \bigcirc$

- $\alpha(\Gamma) = \sum_{e \in E} \text{graphe obtenu en remplaçant dans } \Gamma \text{ l'arête } e \text{ par la portion de graphe du symbole}$

- $\mathfrak{C}(\Gamma) = \sum_{\substack{(e_1, e_2) \in E \\ e_1 \neq e_2}} \text{graphe obtenu en coupant dans } \Gamma \text{ les deux arêtes } e_1 \text{ et } e_2$
et en reliant les demi-arêtes libérées à un nouveau sommet

- $(\Gamma)\mathfrak{X}(\Gamma') = \sum_{\substack{e \in E \\ e' \in E'}} \dots$ (idem que ci-dessus, E étant l'ensemble des arêtes de Γ , E' celui de Γ')

Ces trois opérateurs sont bien sûr étendus par linéarité (resp. bilinéarité) à $\mathbb{Q}[\Gamma]$ (resp. à $\mathbb{Q}[\Gamma] \times \mathbb{Q}[\Gamma]$).

Proposition 1.3. $\forall L \geq 3 :$

$$\binom{L}{0} = \frac{1}{2(L-1)} \left[\alpha \binom{L-1}{0} + \frac{1}{3} \mathfrak{C} \binom{L-1}{0} + \frac{1}{3} \sum_{l=2}^{L-2} \binom{l}{0} \mathfrak{X} \binom{L-l}{0} \right] \quad (4)$$

Remarque 3. Le calcul de $\binom{L}{0}$ donne ainsi la table de tous les graphes fermés 1PI dont on déduit celle des graphes ayant 2 ou 4 pattes. On récupère en même temps le cardinal de leur groupe d'automorphismes, qui apparaît naturellement dans la partie suivante (et a une signification physique, c.f. [2]).

Démonstration de la formule : Considérons un graphe Γ fermé à L boucles ($L \geq 2$). Rappelons qu'il a alors $L - 1$ sommets. Le but est de compter le coefficient de Γ dans le membre de droite. Le groupe d'automorphismes de Γ agit sur l'ensemble V des sommets. Soit ω l'orbite d'un sommet v pour cette action. Dans la classification du paragraphe précédent, tous les sommets de ω sont dans le même cas. (notation : Ω_i est l'ensemble des orbites dont les sommets sont dans le cas i pour $i = 1, 2, 3$)

1. S'ils sont dans le cas 1 : Il existe un unique graphe Γ' et une arête e de ce graphe tels que, en remplaçant e par α dans Γ' , on obtient Γ . Alors

$$\{\sigma \in \text{Aut}(\Gamma), \sigma \text{ fixe } v\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \{\sigma \in \text{Aut}(\Gamma'), \sigma \text{ stabilise } e\} \quad (5)$$

$\text{Aut}(\Gamma')$ étant plongé canoniquement dans $\text{Aut}(\Gamma)$ et l'élément non nul de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ échangeant uniquement les demi-arêtes de l'oreille α . On en déduit

$$|\text{Aut}(\Gamma)| \cdot |\text{orbite de } e \text{ sous } \text{Aut}(\Gamma')| = 2|\text{Aut}(\Gamma')| \cdot |\omega| \quad (6)$$

Notons que deux sommets de type 1 ont des graphes "résiduels" Γ' isomorphes ssi ils sont dans la même orbite. Nous noterons alors $\Gamma'(\omega)$ le graphe associé à n'importe quel sommet de l'orbite ω . D'autre part, lorsque l'on remplace une arête de Γ' par α , on obtient Γ ssi cette arête est dans l'orbite de e . Ainsi le coefficient de $\alpha \binom{L-1}{0}$ en Γ est

$$\sum_{\omega \in \Omega_1} \frac{1}{s(\Gamma'(\omega))} \cdot |\text{orbite de } e| = \sum_{\omega \in \Omega_1} \frac{2|\omega|}{s(\Gamma)} = \sum_{v \text{ de type 1}} \frac{2}{s(\Gamma)} \text{ en utilisant (6)}$$

2. S'ils sont dans le cas 2 ou dans le cas 3 : Numérotions $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ les arêtes partant de v et appelons Γ' le graphe obtenu (pas nécessairement connexe) en enlevant v et en reliant h_1 avec h_2 et h_3 avec h_4 (h_i étant la demi-arête de e_i n'aboutissant pas en v). Si Γ' est connexe, on raisonne comme en 1. La formule (5) devient :

$$= \begin{aligned} & \{\sigma \in \text{Aut}(\Gamma), \sigma \text{ fixe } v \text{ et stabilise la partition } \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\}\} \\ & \{\sigma \in \text{Aut}(\Gamma'), \sigma \text{ stab. } \{h_1, h_2, h_3, h_4\} \text{ et sa partition } \{\{h_1, h_2\}, \{h_3, h_4\}\}\} \end{aligned} \quad (7)$$

D'où, en passant aux cardinaux :

$$= |\text{Aut}(\Gamma)| \cdot |\text{orbite de } \{h_1, h_2, h_3, h_4\} \text{ sous } \text{Aut}(\Gamma')| \cdot |\text{orbite de sa partition } \{\{h_1, h_2\}, \{h_3, h_4\}\} \text{ sous } \text{Aut}(\Gamma')_{\{h_1, h_2, h_3, h_4\}}| \\ = |\text{Aut}(\Gamma')| \cdot |\omega| \cdot |\text{orbite de la partition } \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\} \text{ sous } \text{Aut}(\Gamma)_{\{v\}}| \quad (8)$$

Comme dans le premier cas, les cardinaux des orbites du membre de gauche représentent le nombre de façons de choisir deux arêtes de Γ' pour que, en insérant un nouveau sommet (par le deuxième opérateur de la formule), on obtienne Γ (à un facteur 2 près à cause du choix de l'ordre). La nouveauté est que l'on peut obtenir Γ à partir de plusieurs graphes connexes Γ' différents (selon le choix de recoller 1 avec 2 et 3 avec 4 ou 1 avec 3 et ...). Il y en a 3 pour les sommets de type 2 et 2 pour les sommets de type 3 si l'on compte les graphes Γ' avec leur multiplicité (*i.e.* $|\text{orbite de la partition } \{\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}\} \text{ sous } \text{Aut}(\Gamma)_{\{v\}}|$ par exemple pour le Γ' défini plus haut. Comme en 1, deux tels graphes Γ' obtenus en retirant à Γ deux sommets différents v et v' ne peuvent être isomorphes que si v et v' sont dans la même orbite et ils ont alors même multiplicité. Donc la contribution de $\binom{L-1}{0}$ en Γ est

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_3} \sum_{\{\Gamma'\}} \frac{1}{s(\Gamma')} \cdot 2 |\text{orbites du membre de gauche de (8)}| \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_2 \cup \Omega_3} \sum_{\{\Gamma'\}} \frac{2}{s(\Gamma')} \cdot |\omega| \cdot \text{multiplicité}(\Gamma') \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_2} \frac{2}{s(\Gamma)} \cdot |\omega| \cdot 3 + \sum_{\omega \in \Omega_3} \frac{2}{s(\Gamma)} \cdot |\omega| \cdot 2 \\ &= \sum_{v \text{ de type 2}} \frac{6}{s(\Gamma)} + \sum_{v \text{ de type 3}} \frac{4}{s(\Gamma)} \end{aligned}$$

3. Pour les sommets de type 3, un raisonnement très proche du précédent montre que le troisième terme contribue pour le graphe Γ' non connexe (en agissant sur le couple de ses deux composantes connexes) par

$$\sum_{v \text{ de type 3}} \frac{2}{s(\Gamma)}$$

Finalement, lorsque l'on somme les trois termes avec les coefficients qui leur ont été attribués (on comprend que le $\frac{1}{3}$ qui apparaît vient du fait que l'on peut recoller quatre arêtes deux par deux de trois façons différentes), on obtient en facteur de Γ ,

$$\frac{1}{2(L-1)} \sum_{v \in V} \frac{2}{s(\Gamma)} = \frac{1}{s(\Gamma)}$$

ce qui démontre la proposition.

Remarque 4. Avec ce formalisme, l'algorithme pour obtenir les graphes à 2 et 4 pattes peut s'écrire :

$$\binom{L}{2} = \binom{L+1}{0} \quad (9)$$

$$\binom{L}{4} = \frac{1}{6} \binom{L+2}{0} \quad (10)$$

Les symboles signifient que l'on somme sur les arêtes (resp. les couples de deux arêtes) le graphe obtenu en coupant dans Γ cette (resp. ces) arêtes. Il faut néanmoins ne garder que les graphes obtenus qui sont 1PI.

On pourrait écrire des formules similaires à (4) (mais plus complexes) avec $\binom{L}{2}$ et $\binom{L}{4}$, ayant l'avantage de ne faire apparaître que des graphes 1PI et de n'utiliser que des graphes avec un nombre de boucles inférieur (contrairement à la construction où l'on coupe une ou deux arêtes).

1.4.3 Tables

L'annexe 1 montre l'application de la proposition au calcul de la table des graphes 1PI (avec le cardinal du groupe d'automorphismes). La liste complète jusqu'à 4 boucles est présentée dans l'annexe 2.

2 Groupe algébrique de la renormalisation

Dans cette section, nous allons étudier des structures algébriques liées aux graphes qui apparaissent ensuite naturellement dans la renormalisation des intégrales de la partie 3.

2.1 Cas des graphes à quatre pattes

2.1.1 Opérateur associé à un graphe

Considérons un graphe Γ à 4 pattes donné par les ensembles H , V et E et un \mathbb{C} -espace vectoriel U muni d'une forme bilinéaire symétrique B . Si l'on se donne pour chaque demi-arête h un élément u_h de U , on s'intéresse à l'élément de $Sym^4(U)$

$$\prod_{e=\{h_e^1, h_e^2\} \in E} B(u_{h_e^1}, u_{h_e^2}) \prod_{h \in H_{\text{ext}}} u_h \quad (11)$$

Moralement, on effectue le produit sur chaque arête (grâce à l'opérateur B) et on garde les vecteurs des arêtes extérieures.

Cela définit une application ϕ_Γ $|H|$ -linéaire de U^H dans $Sym^4(U)$, ou de manière équivalente, une application linéaire de

$$\phi_\Gamma : U^{\otimes H} \longrightarrow Sym^4(U)$$

$$\text{Or } U^{\otimes H} = \bigotimes_{v \in V} U^{\otimes t^{-1}(v)}$$

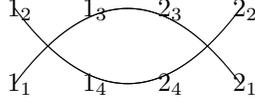
Et, $\forall v \in V$, on a une application naturelle $i_v : Sym^4(U) \hookrightarrow U^{\otimes t^{-1}(v)}$.

Remarque 5 (Concernant i_v). On a évidemment un isomorphisme $U^{\otimes 4} \simeq U^{\otimes t^{-1}(v)}$ mais celui-ci dépend du choix d'un isomorphisme $\{1, 2, 3, 4\} \simeq t^{-1}(v)$ i.e. d'une numérotation des demi-arêtes partant de v . Or, dans le modèle choisi pour décrire les graphes, il n'y a pas de numérotation privilégiée. Par contre, la restriction de cet isomorphisme à $Sym^4(U)$ ne dépend pas de ce choix. D'où l'existence de ce morphisme i_v qui ne s'étend pas d'une manière canonique unique à $U^{\otimes 4}$.

La composition des trois flèches ci-dessus donne une application de $Sym^4(U)^{\otimes V}$ dans $Sym^4(U)$ i.e. une application $|V|$ -linéaire l_Γ de $Sym^4(U)^V$ dans $Sym^4(U)$.

Écriture explicite pour le graphe (2) :

Pour une écrire explicitement cette application, le plus simple est de choisir une numérotation des demi-arêtes partant de chaque sommet, par exemple :



Les inclusions i_{v_j} ($j = 1, 2$) sont de la forme

$$u_1^j \cdot u_2^j \cdot u_3^j \cdot u_4^j \mapsto \frac{1}{4!} \sum_{\sigma \in S_4} u_{\sigma(1)}^j \otimes u_{\sigma(2)}^j \otimes u_{\sigma(3)}^j \otimes u_{\sigma(4)}^j.$$

L'application ϕ_Γ s'écrit

$$\bigotimes_{\substack{i=1, \dots, 4 \\ j=1, 2}} u_i^j \mapsto B(u_3^1, u_3^2) B(u_4^1, u_4^2) u_1^1 \cdot u_1^2 \cdot u_2^1 \cdot u_2^2.$$

La composition donne donc l_Γ

$$\left(\prod_{i=1, \dots, 4} u_i^1, \prod_{i=1, \dots, 4} u_i^2 \right) \mapsto \frac{1}{(4!)^2} \sum_{\sigma, \sigma' \in S_4} B(u_{\sigma(3)}^1, u_{\sigma'(3)}^2) B(u_{\sigma(4)}^1, u_{\sigma'(4)}^2) \cdot u_{\sigma(1)}^1 \cdot u_{\sigma(2)}^1 \cdot u_{\sigma'(1)}^2 \cdot u_{\sigma'(2)}^2 \quad (12)$$

2.1.2 Groupe de transformations non linéaires

Pour comprendre comment l'opération ci-dessus permet de construire un groupe, regardons un analogue plus simple :

Pour chaque entier $n \geq 1$, on considère l'application n -linéaire

$$l_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 \cdot \dots \cdot x_n \end{array}$$

On a bien sûr le monôme associé

$$P_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} .$$

Regardons alors les séries entières de la forme

$$S_c = \sum_{n \geq 1} c_n P_n, \quad c_n \in \mathbb{C} \text{ avec } c_1 = 1. \quad (13)$$

Elles forment un groupe pour la composition définie par

$$S_c \circ S_{c'} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ \vdots \\ k_n \geq 1}} c_n \cdot c'_{k_1} \cdot \dots \cdot c'_{k_n} x^{k_1 + \dots + k_n},$$

ce qui s'écrit en terme de L_n et P_n

$$S_c \circ S_{c'} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{k_1 \geq 1 \\ \vdots \\ k_n \geq 1}} c_n \cdot c'_{k_1} \cdot \dots \cdot c'_{k_n} l_n \circ (P_{k_1}, \dots, P_{k_n}). \quad (14)$$

L'associativité et l'existence d'un élément neutre sont évidentes car il s'agit d'une composition de séries formelles. L'existence d'un inverse s'obtient grâce aux remarques suivantes :

1. $L_n \circ (P_{k_1}, \dots, P_{k_n})$ est de degré $\sum k_i$. En particulier, si $c_2 = \dots = c_n = 0$, $S_c \circ S_{c'}$ et $S_{c'} \circ S_c$ ont les mêmes termes de degré inférieur à n que $S_{c'}$.
2. Si $c_2 = \dots = c_n = 0$ et si on note $S_{c'} = x - c_{n+1}x^{n+1}$, alors $S_c \circ S_{c'}$ et $S_{c'} \circ S_c$ ont tous leurs termes de degré entre 2 et $n+1$ nuls.

On construit alors immédiatement par récurrence une suite de suites $c^{(k)}$ localement stationnaire (i.e. $\forall n \geq 2$, la suite $\left(c_n^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est stationnaire) telle que tous les termes de degré entre 2 et $k+1$ de $S_c \circ S_{c^{(k)}}$ et $S_{c^{(k)}} \circ S_c$ soient nuls. Sa limite terme à terme fournit l'inverse.

2.1.3 Description de la composition

On voudrait construire, avec l'opération décrite en 2.1.1., un groupe analogue à celui du paragraphe 2.1.2. Pour voir ce que devient (14) dans le cas des graphes, il nous faut étudier

$$l_\Gamma \circ (P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n}) \quad (15)$$

Comme dans l'exemple (12), L_Γ s'écrit comme une somme sur $n = |V_\Gamma|$ ensembles de permutations. Etudions d'abord le terme général de cette somme en fixant des permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_n$.

Cette application prend alors $|V_{\gamma_1}| + \dots + |V_{\gamma_n}|$ copies d'un tenseur $u \in \text{Sym}^4(U)$ et les plonge canoniquement dans une famille d'espaces $U^{\otimes 4}$ indexée par les sommets des γ_i . On applique ensuite un certain nombre de fois la forme bilinéaire G à des couples de composantes de ces produits tensoriels. Seuls quatre vecteurs sont gardés pour donner un élément de $\text{Sym}^4(U)$. En effet, le nombre de fonctions B est égal à la somme de ceux des P_{γ_i} et de celui de L_Γ *i.e.*

$$\sum (2|V_{\gamma_i}| - 2) + 2|V_\Gamma| - 2 = 2(\sum |V_{\gamma_i}|) - 2.$$

Les fonctions de ce type sont exactement les $P_{\Gamma'}$ avec $|V_{\Gamma'}| = \sum |V_{\gamma_i}|$. Pour comprendre ce qu'est Γ' dans ce cas, il faut dessiner la famille de sommets et tracer une arête entre deux sommets par fonction B calculant le produit d'un élément de l'un avec un élément de l'autre.

Commençons par tracer les arêtes correspondant aux fonctions B des P_{γ_i} (mais pas celles de l_Γ). On se retrouve alors avec n composantes connexes qui sont exactement les graphes γ_i .

Les fonctions B de l_Γ relient ensuite ces composantes connexes comme si elles étaient les sommets de Γ (écrire (15) suppose que l'on a choisi une numérotation des sommets de Γ car naturellement l_Γ agit sur un produit d'espaces indexé par V_Γ). Les permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ permettent de savoir quelle patte des γ_i doit être identifiée avec quelle demi-arête du sommet i de Γ .

Le graphe Γ' est donc obtenu en *insérant* les graphes γ_i aux sommets de Γ . Notons qu'un tel graphe est alors 1PI. Cette insertion nécessite le choix d'une numérotation des pattes externes de γ_i par les demi-arêtes partant du sommet i de Γ . Pour trouver (15), il faut ensuite faire la moyenne (formelle) sur tous les choix possibles. En effet, le calcul que l'on vient d'effectuer n'est que le terme général de la somme sur des ensembles de permutations apparaissant dans (15).

Finalement, si on numérote les pattes extérieures des γ_i et les demi-arêtes partant de chaque sommet de Γ de façon arbitraire, on obtient

$$l_\Gamma \circ (P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n}) = \frac{1}{(4!)^v} \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_v \in S_4} P_{\Gamma'} \quad (16)$$

où Γ' dépend des σ et est obtenu en remplaçant chaque sommet i de Γ par le graphe γ_i puis en reliant la demi-arête extérieure j de γ_i à la demi-arête extérieure j' de $\gamma_{i'}$ si les demi-arêtes $\sigma_i(j)$ issue du sommet i et $\sigma_{i'}(j')$ issue du sommet i' sont reliées dans Γ .

Remarque 6. Cette somme fait intervenir des Γ' avec :

$$L_{\Gamma'} = L_{\Gamma} + \sum_{i=1}^n L_{\gamma_i} \quad (17)$$

Cette graduation de $\mathbb{C}[\Gamma]$ est très importante dans tout ce qui suit.

2.2 Construction explicite du groupe

On considère l'ensemble G_{\times} des séries

$$S_c = \sum_{\Gamma} c_{\Gamma} \Gamma \in \mathbb{C}[[\text{graphes 1PI à 4 pattes}]]$$

dont le coefficient c_{\times} de l'unique graphe sans boucles est 1. Moralement, chaque graphe représente l'application multilinéaire l_{Γ} et on va construire un analogue du groupe de transformations non linéaires mais, comme on n'a pas démontré de résultat d'injectivité de $\Gamma \mapsto l_{\Gamma}$ (sur $\mathbb{C}[\Gamma]$), on le construit de manière abstraite.

Notons alors $\Gamma \circ (\gamma_1, \dots, \gamma_{|V_{\Gamma}|})$ la moyenne formelle des graphes obtenus en insérant chaque γ_i au sommet i de Γ de toutes les manières possibles. Pour des séries de graphes, cette composition s'écrit :

$$S_c \circ S_{c'} = \sum_{\Gamma} \sum_{\substack{\gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{|V_{\Gamma}|}}} c_{\Gamma} \cdot c'_{\gamma_1} \cdot \dots \cdot c'_{\gamma_{|V_{\Gamma}|}} \Gamma \circ (\gamma_1, \dots, \gamma_{|V_{\Gamma}|}) \quad (18)$$

Lemme 2.1. *Cette loi définit une structure de groupe sur G_{\times} .*

- G_{\times} est clairement stable pour cette loi (grâce à la remarque 6, \times ne peut être obtenu que dans la composition $\times \circ \times$).
- Pour l'associativité, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} & (\Gamma \circ (\gamma_1, \dots, \gamma_v)) \circ (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_V) \\ &= \Gamma \circ ((\gamma_1, \dots, \gamma_v) \circ (\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_V)) \end{aligned}$$

Or cette égalité est évidente car insérer (en ayant choisi des numérotations) les \mathcal{G} dans les γ avant ou après les avoir reliés entre eux selon le graphe Γ ne change pas le graphe obtenu. On obtient donc le même résultat en faisant la moyenne formelle sur les numérotations possibles.

- Le fait que \times est une unité est trivial car $\Gamma \circ (\times, \dots, \times) = \Gamma = \times \circ \Gamma$.
- La démonstration de l'existence d'un inverse est le copier-coller du cas usuel (des séries formelles). On le construit pas à pas en éliminant les graphes dont le nombre de sommets est de plus en plus grand.

Extension incluant les graphes à deux pattes :

La définition de l'opérateur associé à un graphe et de l'insertion semble nécessiter explicitement l'égalité entre la valence de chaque sommet (*i.e.* $|t^{-1}(v)|$)

et le nombre de pattes extérieures des graphes. Il existe néanmoins une construction englobant celle ci-dessus et permettant de prendre en compte les graphes à 2 pattes.

Les éléments de ce groupe G vivent dans

$$\mathbb{C}[[\text{graphes 1PI à quatre pattes}]] \times \mathbb{C}[[\{-\} \cup \text{graphes 1PI à deux pattes}]]$$

Comme ci-dessus, le coefficient de \times du premier terme vaut 1, ainsi que celui de $-$ dans le second.

La composition se définit de manière similaire, sauf qu'il faut maintenant insérer un graphe à deux pattes au niveau de chaque arête du graphe. On note dans ce cas

$$\Gamma \circ (\gamma_1^4, \dots, \gamma_{|V_\Gamma|}^4, \gamma_1^2, \dots, \gamma_{|E_\Gamma|}^2)$$

la moyenne formelle des graphes (1PI) obtenus en remplaçant chaque sommet i de Γ par le graphe γ_i^4 (qui a 4 pattes) et chaque arête j par le graphe γ_j^2 (qui a 2 pattes) de toutes les manières possibles (il y en a $2^{|E_\Gamma|} (4!)^{|V_\Gamma|}$). Dans le cas $\Gamma = -$ qui n'est pas un vrai graphe de Feynman, par convention, on fera comme s'il n'avait aucun sommet et une seule arête. Notons que les graphes obtenus ont le même nombre de pattes extérieures et que (17) est toujours valable. La formule (18) devient alors :

$$S_c \circ S_{c'} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{\Gamma \text{ 1PI à 4 pattes}} \sum_{\substack{\gamma_1^4 \\ \vdots \\ \gamma_{|V_\Gamma|}^4}} \sum_{\gamma_1^2} c_\Gamma \cdot c'_{\gamma_1^4} \cdots c'_{\gamma_{|E_\Gamma|}^2} \Gamma \circ (\gamma_1^4, \dots, \gamma_{|V_\Gamma|}^4, \gamma_1^2, \dots, \gamma_{|E_\Gamma|}^2) , \\ \\ \sum_{\Gamma \text{ 1PI à 2 pattes}} \sum_{\substack{\gamma_1^4 \\ \vdots \\ \gamma_{|V_\Gamma|}^4}} \sum_{\gamma_1^2} c_\Gamma \cdot c'_{\gamma_1^4} \cdots c'_{\gamma_{|E_\Gamma|}^2} \Gamma \circ (\gamma_1^4, \dots, \gamma_{|V_\Gamma|}^4, \gamma_1^2, \dots, \gamma_{|E_\Gamma|}^2) \end{array} \right) \quad (19)$$

Cela définit une structure de groupe sur G (preuve identique à celle pour G_\times).

2.3 Représentation matricielle infinie

Le but de ce paragraphe est de présenter une autre manière de regarder le groupe G , permettant de le voir comme un groupe linéaire algébrique (en dimension infinie *a priori* mais on verra que l'on peut éviter cet écueil). On

utilisera ensuite les propriétés de ces groupes qui ont été très largement étudiés dans la littérature (voir par exemple [9]). Ainsi, dans le paragraphe suivant, nous regarderons à quoi ressemblent dans le cas de G les deux objets classiquement associés aux groupes linéaires algébriques que sont l'algèbre de Lie et l'algèbre de Hopf.

L'idée est de remarquer que la formule (18) est linéaire en c (attention pas en c'). Plus précisément, le groupe G est inclus dans l'espace vectoriel

$$E = \mathbb{C}[\text{graphes 1PI à quatre pattes}] \times \mathbb{C}[\text{graphes 1PI à deux pattes}]$$

et en est une partie génératrice. Étant donné $g_0 \in G$, l'application

$$\Phi(g_0) : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & E \\ g & \longmapsto & g \circ g_0 \end{array}$$

se prolonge de manière unique en une application linéaire sur E . Alors Φ définit un anti-morphisme injectif de groupe de G dans $GL(E)$.

Le problème est que E est de dimension infinie. Pour contourner cette difficulté, on raisonnera souvent sur les espaces $E_n = \mathbb{C}[\text{graphes 1PI à au plus } n \text{ boucles} \cup \{-\}]$. Notons $p_n : E \rightarrow E_n$ le projecteur de tronquage de la série. À une application ϕ de $E \rightarrow E$, on peut alors associer l'application $\phi_n = p_n \circ \phi|_{E_n} : E_n \rightarrow E_n$. Le problème est que $\phi \mapsto \phi_n$ n'est pas compatible avec la composition en général. Mais dans notre cas,

$$\forall g \in G, \Phi(g)_n \circ p_n = \Phi(g)_n \tag{20}$$

Ainsi, restreinte à G , l'application $\phi \mapsto \phi_n$ est un morphisme de groupe. Cette formule est juste une traduction du fait que, quels que soient les graphes Γ et γ_i^j , $\Gamma \circ (\gamma_1^4, \dots, \gamma_\epsilon^2)$ a toujours au moins autant de boucles que Γ (c.f. remarque 6). De manière plus visuelle, on écrit les matrices des $\Phi(g)$ dans la "pseudo-base" des Γ triés par nombre de boucles croissant (chaque élément de E s'écrit de manière unique comme une somme infinie de Γ). Celles-ci sont alors triangulaires inférieures. On peut donc effectuer leurs produits directement (chaque coefficient se calcule par une somme finie) ou se restreindre à des espaces de dimension finie en tronquant la matrice. La formule (20) justifie la consistance de ces restrictions.

Remarque 7 (convention d'écriture). On écrira souvent g à la place de $\Phi(g)$ et de plus, comme la "pseudo-base" est indexée par les graphes, les coefficients de la matrice seront parfois notés $g_{\Gamma, \Gamma'}$.

Écriture détaillée pour $n = 2$:

Grâce aux tables en annexe, on peut écrire la matrice $\phi(g)_2$ pour un élément de G quelconque (voir annexe 3).

Forme générale de ces matrices :

Ces matrices ont une forme très intéressante qui va être utile pour certaines propriétés du paragraphe suivant. Les résultats suivants se lisent immédiatement sur la formule (15) :

1. La matrice de $\Phi(g)$ est triangulaire inférieure.
2. Les deux premières colonnes de $\Phi(S_c)$ sont

$$(\delta_4(\Gamma) \cdot c_\Gamma)_\Gamma \text{ et } (\delta_2(\Gamma) \cdot c_\Gamma)_\Gamma \text{ avec } \begin{cases} \delta_j(\Gamma) = 1 & \text{si } \Gamma \text{ a } j \text{ pattes,} \\ \delta_j(\Gamma) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Tous les coefficients sont polynômiaux en (c_Γ) . De plus, le coefficient de la ligne Γ_l et de la colonne Γ_c s'écrit uniquement avec des c_Γ où $L_\Gamma \leq \max(L_{\Gamma_l}, L_{\Gamma_c})$.

On en déduit immédiatement que

Proposition 2.2. G_n est un groupe algébrique de dimension $\dim E_n - 2$ et dont l'algèbre de fonctions est $\mathbb{C}[c_\Gamma]_{\Gamma:1 \leq L_\Gamma \leq n}$.

2.4 Algèbre de Lie et algèbre de Hopf associées

G_n étant un groupe algébrique, on peut lui associer une algèbre de Lie et une algèbre de Hopf. La première a l'avantage d'être plus simple à manipuler que le groupe au niveau des calculs et la seconde d'apparaître plus naturellement dans les applications en physique théorique qui sont expliquées dans la suite de ce mémoire.

2.4.1 Opérateur d'insertion et algèbre de Lie

Le groupe G_n peut être paramétré (au sens des variétés algébriques) globalement par les c_Γ ($1 \leq L_\Gamma \leq n$). Alors $t \mapsto g(0, \dots, 0, t, 0, \dots, 0)$ (c'est-à-dire l'élément paramétré par $c_\Gamma = t$ et $c_{\Gamma'} = 0$ pour $\Gamma' \neq \Gamma$) décrit un chemin γ_Γ à valeurs dans G et partant de 1. Sa dérivée est donc un élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G}_n . Or

$$\Phi(\gamma(t))_n(\Gamma') = p_n(\Gamma' \circ (" \times " + " - " + t \cdot \Gamma))$$

Cela donne une somme formelle de graphes obtenus à partir de Γ' en insérant :

- à chaque sommet, \times ou Γ (s'il a quatre pattes)
- à chaque arête, $-$ ou Γ (s'il a deux pattes)

Remarquons que insérer \times à un sommet ou $-$ à une arête ne change pas le graphe. De plus, si l'on choisit d'insérer Γ k fois, le coefficient du graphe obtenu sera de la forme $N \cdot t^k$. Dans la dérivée n'interviennent donc que les graphes obtenus en insérant Γ à un seul sommet ou une seule arête de Γ' .

$$\begin{aligned} \sigma_n(\Gamma)(\Gamma') &:= \frac{d}{dt} \Phi(\gamma(t))_n(\Gamma')|_{t=0} \\ &= p_n \left(\left(\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{|\mathcal{V}_{\Gamma'}|} \Gamma' \circ ((\times, \dots, \times, \underbrace{\Gamma}_{k\text{-ième position}}, \dots, \times), (-, \dots, -)) \quad \text{si } \Gamma \text{ a 4 pattes} \\ \sum_{k=1}^{|\mathcal{E}_{\Gamma'}|} \Gamma' \circ ((\times, \dots, \times), (-, \dots, -, \underbrace{\Gamma}_{k\text{-ième position}}, -, \dots, -)) \quad \text{si } \Gamma \text{ a 2 pattes} \end{array} \right) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Les $\sigma_n(\Gamma)$ (pour $1 \leq L_\Gamma \leq n$) sont alors des éléments de \mathcal{G}_n linéairement indépendants (car les $\sigma_n(\Gamma)$ ("×" + "−") = Γ le sont). Ils en forment donc une base (pour des raisons de cardinaux). Le crochet est naturellement donné par

$$\begin{aligned} [\sigma_n(\Gamma), \sigma_n(\Gamma')] &= \sigma_n(\Gamma) \circ \sigma_n(\Gamma') - \sigma_n(\Gamma') \circ \sigma_n(\Gamma) \\ &= \sigma_n(\sigma_n(\Gamma)(\Gamma') - \sigma_n(\Gamma')(\Gamma)). \end{aligned} \quad (22)$$

La dernière égalité provient de la remarque suivante. L'opérateur $\sigma_n(\Gamma) \circ \sigma_n(\Gamma')$ appliqué à un graphe γ consiste à insérer Γ' dans γ puis Γ dans le résultat. On obtient une somme contenant deux types de termes : ceux où le graphe Γ est inséré à un sommet de Γ' et ceux où les graphes Γ et Γ' sont insérés à deux sommets différents de γ . Les termes du deuxième type se compensent dans le crochet de Lie. Il reste les termes du premier type qui constituent $\sigma_n(\sigma_n(\Gamma)(\Gamma') - \sigma_n(\Gamma')(\Gamma))$.

Remarque 8. – On peut définir un élément $\sigma(\Gamma)$ en retirant le p_n dans l'expression de σ_n . Cela permet de munir l'union des \mathcal{G}_n d'une structure d'algèbre de Lie.

- L'intérêt de regarder l'algèbre de Lie est que $\sigma(\Gamma)$ est beaucoup plus facile à visualiser (les matrices sont plus faciles à écrire par exemple) que $\Phi(\Gamma)$ (car on insère un seul graphe à la fois). Elle contient quand même autant d'"information" car il y a une bijection entre sous-groupes algébriques de $\mathcal{U}ni$ et sous-algèbres de Lie de T_n^+ .
- On peut construire directement l'algèbre de Lie $\bigcup \mathcal{G}_n$ de façon formelle grâce à (22). Il suffit en effet de remarquer que le produit $\Gamma \star \Gamma' = \sigma(\Gamma)(\Gamma')$ est quasi-associatif (c.f. [1]). Cependant, l'approche présentée ici a l'avantage de faire apparaître naturellement les moyennes sur les différentes numérotations et de mieux comprendre le lien avec l'algèbre de Hopf introduite par Connes et Kreimer (c.f. 2.4.2 et [6]).
- Quelques exemples de calcul pour manipuler cette algèbre sont présentés dans l'annexe 4.

2.4.2 Forêt de sous-graphes divergents et algèbre de Hopf

Nous allons maintenant regarder en détail l'algèbre de Hopf \mathcal{H}_n du groupe G_n . L'algèbre sous-jacente, qui est l'algèbre des fonctions polynômiales sur G_n , est libre commutative générée par les

$$c_\Gamma : \begin{array}{ccc} G_n & \rightarrow & \mathbb{C} \\ g & \mapsto & \begin{cases} g_{\Gamma, \times} & \text{si } \Gamma \text{ a } 4 \text{ pattes} \\ g_{\Gamma, -} & \text{si } \Gamma \text{ a } 2 \text{ pattes} \end{cases} \end{array} \quad \text{pour } 1 \leq L_\Gamma \leq n$$

Ce qui nous intéresse est donc le calcul du coproduit $\Delta(c_\Gamma)$. Pour cela, nous aurons besoin de la notion de forêt de sous-graphes divergents :

Définition 2.1. Prenons un sous-ensemble E_0 de l'ensemble des arêtes E . Ce sous-ensemble est l'union de k composantes connexes (E_1, \dots, E_k) . On l'appelle forêt des sous-graphes E_i . Une demi-arête $h \notin \bigcup E_0$ est dite extérieure à la composante connexe E_i si son extrémité est l'extrémité d'une arête de E_i . Un sous-graphe E_i est dit divergent s'il est 1PI avec 2 ou 4 demi-arêtes extérieures (l'intégrale associée diverge alors, c.f. 3). Si tous les E_i sont divergents, on peut obtenir un nouveau graphe de Feynman 1PI en remplaçant les E_i ayant 4 pattes par \times et ceux n'en ayant que 2 par $-$. Ce graphe est noté $\Gamma_{/E_0}$ et on dit que l'on a contracté E_0 dans G . Dans la suite, la notation (E_i) représentera parfois la famille des sous-graphes de E_0 réunis avec les sommets n'étant l'extrémité d'aucune arête de E_0 et les arêtes n'étant pas dans E_0 .

Via l'identification canonique $\mathbb{C}[G \times G] \simeq \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$, $\Delta(c_\Gamma)$ est défini par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\Delta(c_\Gamma)} & \mathbb{C} \\ & \searrow m_G & \nearrow c_\Gamma \\ & & G \end{array}$$

$$\Delta(c_\Gamma)(g(c^1), g(c^2)) = \sum_{L_\gamma \leq n} g(c^1)_{\Gamma, \gamma} \cdot g(c^2)_{\gamma, \times \text{ ou } -} \quad (23)$$

$$= \sum_{\substack{L_\gamma \leq n \\ H_{\text{ext}}(\gamma) = H_{\text{ext}}(\Gamma)}} g(c^1)_{\Gamma, \gamma} \cdot c_\gamma^2 \quad (24)$$

Proposition 2.3 (Reformulation du coproduit).

$$\Delta\left(\frac{s(\Gamma)}{|H_{\text{ext}}(\Gamma)|!} \cdot c_\Gamma\right) = \sum_{E_0 \text{ forêt de sgd}} \left(\prod_{i=1}^k \frac{s(E_i)}{|H_{\text{ext}}(E_i)|!} \cdot c_{E_i}\right) \otimes \left(\frac{s(\Gamma_{/E_0})}{|H_{\text{ext}}(\Gamma_{/E_0})|!} \cdot c_{\Gamma_{/E_0}}\right) \quad (25)$$

Démonstration : La définition formelle du groupe permet d'écrire :

$$g(c^1)_{\Gamma, \gamma} = \sum \frac{1}{2^{|E_\gamma|} (4!)^{|V_\gamma|}} c_{\gamma_1^1}^1 \cdot \dots \cdot c_{\gamma_1^2}^1 \cdot c_{\gamma_1^3}^1 \cdot \dots \cdot c_{\gamma_1^4}^1 \cdot \dots \cdot c_{\gamma_1^4}^1 \quad (26)$$

où la somme porte sur toutes les manières (comptées avec leur multiplicité si différentes numérotations donnent le même résultat) d'obtenir Γ en insérant des graphes γ_r^s dans γ . Pour transformer la double somme apparaissant dans les équations (24) et (26) en une somme sur les forêts comme dans la proposition, il faut un résultat combinatoire liant ces deux objets.

Introduisons pour cela la terminologie suivante :

1. Une *insertion* dans γ est la donnée de :
 - pour chaque sommet, une bijection entre les demi-arêtes y arrivant et $\{1, 2, 3, 4\}$;

- pour chaque arête, une bijection entre ses demi-arêtes et $\{1, 2\}$;
- d’une fonction associant à chaque sommet un graphe à 4 pattes extérieures muni d’une bijection des pattes extérieures avec $\{1, 2, 3, 4\}$;
- d’une fonction associant à chaque arête un graphe à 2 pattes extérieures muni d’une bijection des pattes extérieures avec $\{1, 2\}$.

Notons que $Aut \gamma$ agit naturellement sur cet espace d’insertions. Grâce aux numérotations, à une insertion est associé canoniquement le graphe obtenu en insérant à chaque sommet et à chaque arête le graphe qui lui est associé. On notera alors $Ins(\gamma)$ (resp. $Ins(\gamma \rightarrow \Gamma)$) l’ensemble des insertions dans γ (resp. telles que le graphe associé soit Γ). On peut aussi garder l’information des numérotations restantes et de ce qui vient d’être inséré sous la forme suivante.

2. Une *forêt numérotée* de Γ est la donnée d’une forêt E_0 de sous-graphes divergents et de bijections :
 - pour chaque E_i , entre ses pattes extérieures et $\{1, 2\}$ ou $\{1, 2, 3, 4\}$;
 - pour chaque sommet n’étant l’extrémité d’aucune arête de E_0 , entre les demi-arêtes y arrivant et $\{1, 2, 3, 4\}$;
 - pour chaque arête n’étant pas dans E_0 , entre ses demi-arêtes et $\{1, 2\}$.
Grâce à ces numérotations, si l’on contracte la forêt E_0 dans Γ on obtient un graphe γ muni d’une insertion. On notera alors $\mathcal{F}_{num}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{F}_{num}(\Gamma \rightarrow \gamma)$) l’ensemble des forêts numérotées de Γ (resp. telles que le graphe contracté soit γ).

Malheureusement, les applications décrites ci-dessus ne sont bien définies qu’à automorphisme du graphe près (agissant sur l’espace d’arrivée). En effet, même si Γ/E_0 est isomorphe à γ , il n’y a pas d’isomorphisme canonique entre ces deux objets et l’association d’une forêt numérotée à une insertion demande le choix d’un isomorphisme. Il en est de même pour les isomorphismes entre le graphe obtenu en insérant certains graphes dans γ d’une part et Γ d’autre part.

Lemme 2.4.

$$\phi : Ins(\gamma \rightarrow \Gamma) / Aut \gamma \simeq \mathcal{F}_{num}(\Gamma \rightarrow \gamma) / Aut \Gamma$$

De plus, pour toute orbite w de $Ins(\rightarrow \Gamma)$, on a :

$$|w| \cdot s(\Gamma) = |\phi(w)| \cdot s(\gamma) \cdot \prod_{i=1}^k s'(E_i) \quad (27)$$

où les E_k sont les composantes connexes d’une forêt de l’orbite $\phi(w)$ et $s'(E_i)$ le nombre d’automorphismes de E_i fixant une à une les pattes extérieures.

Démonstration : Pour l’isomorphisme, on a déjà vu la définition des deux fonctions réciproques l’une de l’autre ci-dessus, il suffit de vérifier qu’elles sont bien définies sur les orbites, ce qui est facile (tout isomorphisme de Γ passe au quotient en un isomorphisme de γ et réciproquement, on peut prolonger les isomorphismes de γ en isomorphismes de Γ).

Pour la formule combinatoire, il suffit de comparer le fixateur $Aut(\gamma)_i$ d'une insertion de w à celui d'une forêt numérotée de $\phi(w)$ (noté $Aut(\Gamma)_f$). Or, par passage au quotient tout élément de $Aut(\Gamma)_f$ définit un élément de $Aut(\gamma)_i$, le noyau de ce morphisme surjectif étant les éléments de $Aut(\Gamma)$ stabilisant chaque E_i et fixant leurs pattes extérieures. Il est isomorphe au produit direct des $Aut'(E_i)$ (automorphismes de E_i fixant ses pattes extérieures). \square

Revenons au calcul du coproduit. Chaque façon d'insérer des graphes γ_i dans γ est représentée par $(4!)^{|V_\Gamma|}(2!)^{|E_\Gamma|}$ insertions différentes. En effet, à une bijection entre les demi-arêtes d'un sommet (resp. arête) et les pattes d'un graphe, on peut associer $4!$ (resp $2!$) bijections entre $\{1, 2, 3, 4\}$ (resp $\{1,2\}$) et les pattes du graphe, chaque choix donnant une insertion différente.

Réciproquement, étant donnée une insertion, elle provient de $\prod_{i=1}^k \frac{s(E_i)}{s'(E_i)}$ familles de bijections. En effet, pour chaque E_i , on peut choisir autant de bijections que $Aut(E_i)$ induit de bijections sur les pattes extérieures, c'est-à-dire $\frac{s(E_i)}{s'(E_i)}$. Grâce à cette remarque et au lemme, la formule (26) devient donc :

$$g(c^1)_{\Gamma, \gamma} = \sum_{(E_i) \in \text{Ins}(\gamma \rightarrow \Gamma)} \frac{\prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} \frac{s(E_i)}{s'(E_i)}}{((4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|})^2} \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} c_{E_i}^1 \quad (28)$$

$$= \sum_{w \in \text{Ins}(\gamma \rightarrow \Gamma) / \text{Aut}_\gamma} \frac{|w| \cdot \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} \frac{s(E_i)}{s'(E_i)}}{((4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|})^2} \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} c_{E_i}^1 \quad (29)$$

$$= \sum_{\phi(w) \in \mathcal{F}_{\text{num}}(\Gamma \rightarrow \gamma) / \text{Aut}_\Gamma} \frac{|\phi(w)| \cdot s(\gamma) \cdot \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} s'(E_i)}{s(\Gamma)} \frac{\prod_{V \cup E} \frac{s(E_i)}{s'(E_i)}}{((4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|})^2} \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} c_{E_i}^1 \quad (30)$$

$$= \sum_{E_0 \in \mathcal{F}_{\text{num}}(\Gamma \rightarrow \gamma)} \frac{s(\gamma) \cdot \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} s'(E_i)}{s(\Gamma)} \frac{\prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} \frac{s(E_i)}{s'(E_i)}}{((4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|})^2} \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} c_{E_i}^1 \quad (31)$$

$$= \sum_{E_0 \in \mathcal{F}(\Gamma \rightarrow \gamma)} \frac{s(\gamma)}{s(\Gamma)} \frac{\prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} s(E_i)}{(4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|}} \prod_{V_\gamma \cup E_\gamma} c_{E_i}^1. \quad (32)$$

La dernière égalité vient du fait que chaque forêt peut être numérotée de $(4!)^{|V_\gamma|}(2!)^{|E_\gamma|}$ manières différentes (la somme est effectuée sur les forêts (sans numérotations!) telles que le graphe contracté est γ). En réinsérant ceci dans

(24), on trouve :

$$\Delta(c_\Gamma)(g(c^1), g(c^2)) = \sum_{E_0 \in \mathcal{F}} \frac{s(\Gamma/E_0) \cdot \prod_{V_{\Gamma/E_0} \cup E_{\Gamma/E_0}} s(E_i)}{s(\Gamma) \cdot (4!)^{|V_{\Gamma/E_0}|} (2!)^{|E_{\Gamma/E_0}|}} \prod_{V_{\Gamma/E_0} \cup E_{\Gamma/E_0}} c_{E_i}^1 \cdot c_{\Gamma/E_0}^2, \quad (33)$$

$$i.e. \quad \Delta(c_\Gamma) = \sum_{E_0 \in \mathcal{F}} \frac{s(\Gamma/E_0) \cdot \prod_{V_{\Gamma/E_0} \cup E_{\Gamma/E_0}} s(E_i)}{s(\Gamma) \cdot (4!)^{|V_{\Gamma/E_0}|} (2!)^{|E_{\Gamma/E_0}|}} \prod_{V_{\Gamma/E_0} \cup E_{\Gamma/E_0}} c_{E_i} \otimes c_{\Gamma/E_0} \quad (34)$$

On reconnaît alors la proposition en se rappelant que :

$$\begin{aligned} |H_{\text{ext}}(\Gamma)| &= |H_{\text{ext}}(\Gamma/E_0)| \\ \frac{s(\times)}{4!} c_\times &= 1 = \frac{s(-)}{2!} c_- \end{aligned}$$

La preuve est tout à fait similaire pour les graphes à deux pattes □

Remarque 9. – Le coproduit ne dépend donc pas de l'entier n choisi pour tronquer les matrices. On peut donc définir une algèbre de Hopf \mathcal{H} libre commutative générée par les c_Γ dont le coproduit est défini par (25).

- Les forêts $E_0 = \emptyset$ et $E_0 = E$ donnent les termes $1 \otimes c_\Gamma$ et $c_\Gamma \otimes 1$ du coproduit. Les autres termes ne font apparaître que des graphes avec un nombre de boucles strictement inférieur à L_Γ
- En introduisant le symbole formel $\Gamma = \frac{s(\Gamma)}{|H_{\text{ext}}(\Gamma)|!} \cdot c_\Gamma$, on retrouve la forme sous laquelle la structure mathématique sous-jacente à la théorie quantique des champs est initialement apparue (dans l'article de A. Connes et D. Kreimer [6]), mais l'introduire sans considérer le groupe demande beaucoup de vérifications calculatoires.
- Quelques exemples de calcul de coproduit sont présentés dans l'annexe 4, ainsi que l'illustration de la proposition.

3 Intégrales de Feynman

En théorie quantique des champs est associée à chaque graphe de Feynman une intégrale. Nous allons expliquer les règles permettant d'écrire cette intégrale et constater qu'elle est divergente. Au lieu de la calculer, nous allons donc déformer la fonction à l'intérieur de l'intégrale de manière à ce que l'intégrale devienne convergente. C'est ce qu'on appelle un schéma de régularisation.

3.1 Flots

Dans ce qui suit, nous noterons D la dimension de l'espace-temps. Nous aimerions mener les calculs pour $D = 4$ mais nous allons voir que c'est utile de travailler en dimension générale dans un premier temps.

Définition 3.1. Soit $\Gamma = (V, H, E)$ un graphe connexe (on fera cette hypothèse dans toute cette partie). On appelle flot toute fonction $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}^D$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall e \in E, \quad \sum_{h \in e} \varphi(h) &= 0 \\ \forall v \in V, \quad \sum_{h \in t^{-1}(v)} \varphi(h) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

De manière équivalente, si l'on choisit une orientation (arbitraire) de chaque arête et de chaque patte, il s'agit d'associer une valeur à chaque arête et à chaque patte de telle manière que, à chaque sommet, la somme de ce qui y arrive soit égale à la somme de ce qui en part (exactement comme la loi des nœuds en électricité). Ce point de vue est plus visuel.

Exemple important : Appelons circuit une suite de demi-arêtes 2 à 2 distinctes h_1, \dots, h_{2n} telle que

$$\forall j = 1, \dots, n \left\{ \begin{array}{l} \{h_{2j-1}, h_{2j}\} \text{ est une arête} \\ t(h_{2j}) = t(h_{2j+1}) \text{ avec la convention que } h_{2n+1} = h_1 \end{array} \right. \quad (36)$$

Étant donné un tel circuit et un vecteur $k \in \mathbb{R}^D$, nous pouvons regarder le flot (dit unitaire si $D = 1$ et $k = 1$) défini par :

$$\text{flot}(h, k) : \begin{array}{ll} H & \longrightarrow \mathbb{R}^D \\ h_{2j-1} & \longmapsto k \\ h_{2j} & \longmapsto -k \\ \text{autres } h & \longmapsto 0 \end{array} .$$

Propriété : Il est immédiat que tout flot φ vérifie

$$\sum_{h \in H_{\text{ext}}} \varphi(h) = \sum_{v \in V} \left(\sum_{h \in t^{-1}(v)} \varphi(h) \right) - \sum_{e \in E} \left(\sum_{h \in e} \varphi(h) \right) = 0. \quad (37)$$

Réciproquement, on peut se poser la question de l'existence de flots ayant des valeurs données sur les pattes extérieures.

Proposition 3.1. Soient (V, H, E) un graphe et $\psi : H_{\text{ext}}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}^D$ tels que

$$\sum_{h \in H_{\text{ext}}} \varphi(h).$$

Alors l'ensemble des flots ϕ prolongeant ψ est un espace affine de dimension $D \cdot L_\Gamma$ (L_Γ étant le nombre de boucles de Γ , c.f. 1). On le notera Φ_ψ

Démonstration :

Il s'agit de résoudre un système qui peut se mettre sous la forme (A et l linéaires) :

$$A \cdot (\varphi(e))_{e \in E} = l(\psi(h))_{h \in H_{\text{ext}}}$$

Il suffit donc de montrer que cet ensemble est non vide quelle que soit la fonction ψ vérifiant (37) et de traiter le cas $\psi \equiv 0$.

Montrons le résultat par récurrence sur le nombre de sommets dans le cas d'un arbre T ayant un nombre quelconque de pattes extérieures. Pour un arbre à un sommet (et donc sans arêtes) $\varphi = \psi$ est solution. Donnons-nous un tel ψ pour un arbre à $n \geq 2$ sommets; il existe un sommet v de T auquel n'aboutit qu'une seule arête $e = \{h_v, h'\}$. La seule valeur que l'on peut associer à h_v pour respecter (36) est alors $\varphi(h_v) := - \sum_{h \in H_{\text{ext}} \cap t^{-1}(v)} \psi(h)$. Le graphe $T' = (V \setminus \{v\}, H \setminus \{t^{-1}(v)\}, E \setminus \{e\})$ est alors un arbre à $n - 1$ sommets. Par (HR), la fonction ψ' définie par :

$$\begin{cases} \psi' \equiv \psi, & \text{sur } H_{\text{ext}} \setminus (H_{\text{ext}} \cap t^{-1}(v)); \\ \psi'(h') = -\varphi(h_v). \end{cases}$$

peut être prolongée en un flot φ' sur T' . Combiné à la valeur déjà calculée pour l'arête e , φ' donne un flot sur T prolongeant ψ . Pour le cas d'un graphe quelconque, il suffit de choisir un arbre couvrant T , le résultat pour T montre l'existence d'un flot φ prolongeant ψ et valant 0 sur $E \setminus T$.

Pour le cas $\psi \equiv 0$, regardons uniquement ce qui se passe pour $D = 1$ dont se déduisent facilement tous les autres cas. Il s'agit de trouver la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire c'est-à-dire le rang d'une matrice. Les coefficients étant dans \mathbb{Z} , cette dimension est la même que si l'on regardait la matrice dans \mathbb{Q} . On peut donc chercher uniquement les solutions dans \mathbb{Q} , ou dans \mathbb{Z} , quitte à les multiplier par un dénominateur commun. Or ce système, vu comme équations dans \mathbb{Z} , est exactement la définition simpliciale de $H_1(\Gamma)$. Les solutions dans \mathbb{Q} sont $H_1(\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (facile car tous les éléments de ce produit tensoriel sont des tenseurs purs), qui est un \mathbb{Q} -espace de dimension L_Γ . \square

Cette démonstration montre entre autres comment associer à une \mathbb{Z} -base $(\varphi_1, \dots, \varphi_L)$ de $H_1(\Gamma)$ une base de l'espace vectoriel dirigeant l'espace des solutions.

$$(\varphi_{i,j})_{\substack{i=1\dots L \\ j=1\dots D}} \text{ où } \varphi_{i,j}(e) = \varphi_i(e) \cdot f_j \quad \forall e \in E. \quad (38)$$

Connaître des \mathbb{Z} -bases particulières de $H_1(\Gamma)$ est donc intéressant.

- Lemme 3.2.** 1. Soient Γ un graphe et T un arbre couvrant. Posons $E \setminus T = \{e_1, \dots, e_L\}$. Alors il existe une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$ formée de flots unitaires φ_i , chacun associé respectivement à un circuit de $T \cup \{e_i\}$.
2. Tout flot unitaire associé à un circuit peut être complété en une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$.

Démonstration :

1. Commençons par démontrer que chaque graphe connexe avec un nombre de boucles $L \geq 1$ contient un circuit non trivial en raisonnant par récurrence sur le nombre de sommets.

- Un graphe à un sommet avec $L \geq 1$ a au moins une arête. Ses deux extrémités sont alors l'unique sommet et cette arête forme un circuit non trivial.
- Soit Γ un graphe avec $L \geq 1$ et au moins deux sommets. Si un des sommets v n'est l'extrémité que d'une seule arête e , alors l'hypothèse de récurrence appliquée à $(V \setminus \{v\}, H \setminus t^{-1}(v), E \setminus \{e\})$ (graphe connexe ayant le même nombre de boucles que Γ) permet de conclure.
- Sinon, choisissons un sommet v_0 arbitrairement. On construit des suites $(e_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ et $(v_i)_{0 \leq i \leq k}$ récursivement de la façon suivante : e_i est une arête partant de v_i différente de e_{i-1} (il en existe toujours une grâce à l'élimination du cas ci-dessus) et v_{i+1} l'autre extrémité de e_i . On arrête la construction de cette suite dès qu'il y a une répétition dans la suite des sommets, *i.e.* que $\exists j < k$ tq $v_j = v_k$ alors la suite (e_j, \dots, e_{k-1}) est un circuit non trivial dans Γ .

Nous pouvons donc choisir un circuit non trivial C_i dans chacun des sous-graphes $T \cup \{e_i\}$ et considérer le flot unitaire associé φ_i . Montrons que la famille $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq L}$ est une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$. Pour des raisons de cardinalité, il suffit de voir que c'est une famille génératrice. Choisissons une orientation des arêtes telle que e_i soit parcourue dans le sens positif dans Γ_i . Un élément h de $H_1(\Gamma)$ peut alors être vu comme une fonction de E dans \mathbb{Z} (définition simpliciale). Regardons alors

$$h' = h - \sum_{i=1}^L h(e_i) \varphi_i$$

C'est un élément de $H_1(\Gamma)$ valant 0 sur tous les e_i . h'/T est alors un élément de $H_1(T) = 0$ et est donc nul. Finalement $h' = 0$ et h s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers des φ_i .

2. Si e est une arête d'un circuit C , le même raisonnement que ci-dessus montre que n'importe quelle base de $H_1(\Gamma \setminus \{e\})$ complète le flot unitaire associé à C en une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$ □

3.2 Règles de Feynman

La forme que nous allons donner ici de l'intégrale est obtenue après plusieurs transformations permettant d'éviter certaines difficultés, mais elle conserve la propriété de divergence qui est l'origine des problèmes soulevés ici. Pour voir des détails sur l'origine physique de ces règles et le sens de l'intégrale à calculer, regarder l'exposé de V.Rivasseau [2]. Ici, je ne résumerai que les règles qui nous intéressent par la suite.

Soit $\Gamma = (V, H, E)$ un graphe de Feynman. Donnons-nous une fonction $\psi : H_{\text{ext}} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sum_{h \in H_{\text{ext}}} \psi(h) = 0$. D'après la proposition 3.1., l'ensemble des flots la prolongeant est un sous \mathbb{R} -espace affine de dimension $D \cdot L_\Gamma$. S'il on

en fixe un élément particulier et une base du sous-espace vectoriel associé (on choisira une base associée par (38) à n'importe quelle \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$), il est isomorphe à $\mathbb{R}^{D \cdot L_\Gamma}$. Il peut donc être muni de la mesure de Lebesgue (on en choisit une arbitrairement sur $\mathbb{R}^{D \cdot L_\Gamma}$ que l'on notera $d^{D \cdot L} \varphi$).

Remarque 10. Cette mesure ne dépend ni du point choisi (invariance par translation), ni de la \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$ choisie. En effet, si l'on change la \mathbb{Z} -base sous-jacente de $H_1(\Gamma)$, la mesure est alors multipliée par la valeur absolue du déterminant de la matrice de changement de base. Si l'ordre des bases est l'ordre lexicographique sur (j, i) , elle est diagonale par blocs avec D blocs égaux à la matrice de changement de base entre les \mathbb{Z} -bases correspondantes de $H_1(\Gamma)$. Or cette dernière et son inverse sont à coefficients entiers donc le déterminant est ± 1 .

Étant donné un flot φ fixé, on associe à chaque arête le propagateur :

$$\frac{1}{\|\varphi(e)\|^2 + m^2}$$

la norme intervenant ici étant la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^D .

$\varphi(e)$ dépend de l'orientation choisie pour l'arête e mais sa norme au carré n'en dépend pas. La fonction que l'on veut intégrer est alors le produit de ces propagateurs *i.e.*

$$I(\psi) = \int_{\Phi_\psi} \left(\prod_{e \in E} \frac{1}{\|\varphi(e)\|^2 + m^2} \right) d^{D \cdot L_\Gamma} \varphi \quad (39)$$

Son dénominateur ne s'annule jamais mais il peut y avoir des problèmes d'intégrabilité à l'infini. La fonction à intégrer est une fraction rationnelle de degré $-2|E_\Gamma|$ alors qu'on intègre sur un espace de dimension $D \cdot L_\Gamma$. On pose donc $w(\Gamma) = D \cdot L_\Gamma - 2|E_\Gamma|$ appelé degré de divergence de Γ . Rappelons que l'intégrale diverge dès que $w(\Gamma) \geq 0$.

$$\begin{aligned} w(\Gamma) &= D \cdot (|V| - 1/2|H_{\text{ext}}| + 1) - 2(2|V| - 1/2|H_{\text{ext}}|) \\ &= 4 - |H_{\text{ext}}| \text{ en dimension 4.} \end{aligned}$$

Ces intégrales sont donc divergentes en dimension 4 (*i.e.* dans la situation physique étudiée) pour les graphes à 2 ou 4 pattes. Ce constat a été un des principaux obstacles rencontrés en théorie quantique des champs. Nous allons voir comment le contourner.

Remarque 11. Ce n'est pas parce que le degré de divergence est strictement négatif que l'intégrale converge. En particulier, si on considère un graphe dont un sous-graphe a un degré de divergence positif, l'intégrale associée diverge. Cela permet de comprendre intuitivement pourquoi, dans la suite, il faut retirer des termes correspondant aux sous-graphes divergents pour donner une valeur finie à cette intégrale.

3.3 Une autre présentation de l'intégrale

Une unité de mesure telle que $d^{D \cdot L} \varphi$ n'est facile à manipuler que si l'on choisit une base de l'espace vectoriel associé. Malheureusement il n'y a pas de choix canonique pour cela. Or, en introduisant des paramètres intéressants, nous pouvons transformer cette intégrale en une forme canonique. En plus, cette nouvelle forme a un autre avantage : l'espace sur lequel on intègre est de dimension plus petite.

3.3.1 Paramètres de Schwinger

L'idée est de remplacer chaque propagateur par l'intégrale suivante :

$$\frac{1}{\|\varphi(e)\|^2 + m^2} = \int_0^\infty \exp(-\alpha_e(\|\varphi(e)\|^2 + m^2)) d\alpha_e. \quad (40)$$

On effectue donc cette substitution pour toutes les arêtes e dans (39). *A priori*, cela augmente le nombre de variables sur lesquelles on doit intégrer, mais l'avantage est que l'on peut maintenant échanger les deux intégrales (par Fubini-Tonelli, car il s'agit d'une fonction positive) et calculer explicitement l'intégrale sur Φ_ψ .

$$I(\psi) = \int_{[0, \infty[^{|E|}] \left[\int_{\Phi_\psi} \exp\left(-\sum_{e \in E} \alpha_e(\|\varphi(e)\|^2 + m^2)\right) d^{D \cdot L} \varphi \right] \prod_{e \in E} d\alpha_e. \quad (41)$$

L'intégrale entre crochets est alors l'intégrale de l'exponentielle d'un polynôme du second degré (défini négatif) sur un espace vectoriel. Les intégrales de ce type sont toujours convergentes et leur valeur se déduit très facilement du cas classique $D = 1$.

Lemme 3.3. *Soit Q (resp L) une forme quadratique définie positive (resp linéaire) sur \mathbb{R}^D et c un réel. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}^D} \exp(-Q(x) - L(x) - c) d^D x = \sqrt{\frac{\pi^D}{\det(Q)}} \cdot \exp\left(-\min_{x \in \mathbb{R}^d} (Q(x) + L(x) + c)\right). \quad (42)$$

Démonstration : Commençons par traiter le cas $L \equiv 0$ et $c = 0$. Q est définie positive. Il existe donc une base (f_1, \dots, f_D) de \mathbb{R}^D telle que la matrice de Q dans cette base soit I_D . Notons P la matrice de changement de base, (y_1, \dots, y_D) les coordonnées de x dans la base (f_1, \dots, f_D) :

$$\begin{aligned} {}^t P \cdot Q \cdot P &= I_D \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \end{pmatrix} &= P \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_D \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant alors la formule du changement de variables dans le membre de gauche de (42), on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^D} \exp(-Q(x)) d^D x = \int_{\mathbb{R}^D} \exp(-y_1^2 - \dots - y_n^2) |\det P| d^D y \quad (43)$$

$$\begin{aligned} &= |\det(P)| \cdot \prod_{i=1}^D \left(\int_{\mathbb{R}^D} \exp(-y_i^2) dy_i \right) \\ &= (|\det(Q)|)^{-1/2} \cdot \sqrt{\pi^D}. \end{aligned} \quad (44)$$

Ceci correspond exactement à la formule dans le cas où c et L sont nuls.

Le cas général se ramène à celui-là de la manière suivante : notons φ_Q la forme bilinéaire symétrique associée à Q . Comme Q est non dégénérée, il existe un x_0 tel que $\varphi_Q(x_0, \cdot) = L$. Alors le changement de variables $x' = x + 1/2x_0$ dans (42) donne :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^D} \exp(-Q(x) - L(x) - c) d^D x \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} \exp\left(-Q\left(x' - \frac{1}{2}x_0\right) - L\left(x' - \frac{1}{2}x_0\right) - c\right) d^D x' \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} \exp\left(-Q(x') - \frac{1}{4}Q(x_0) + \varphi_Q(x_0, x') - L(x') + \frac{1}{2}L(x_0) - c\right) d^D x' \\ &= \exp\left(-c - \frac{1}{4}Q(x_0) + \frac{1}{2}L(x_0)\right) \cdot \int_{\mathbb{R}^D} \exp(-Q(x')) d^D x' \end{aligned}$$

Or la nouvelle constante c' dans l'exponentielle du membre de gauche correspond à $-(Q(x) + L(x) + c - Q(x'))$. C'est donc bien l'opposé du minimum de $Q(x) + L(x) + c = Q(x') - c'$ sur \mathbb{R}^D d'où la formule (42). \square

Une fois ce lemme appliqué à (41), il nous reste une intégrale sur un espace de dimension réelle $|E|$.

3.3.2 Forme de l'intégrale obtenue

Les différentes expressions apparaissant dans le calcul du lemme 3.3 peuvent en fait s'exprimer grâce à la combinatoire du graphe. Nous allons voir comment établir un tel résultat pour "det(Q)" car cette partie nous intéressera dans le paragraphe suivant mais il existe des formules similaires pour l'argument de l'exponentielle. Ceci montre que cette forme de l'intégrale ne dépend d'aucun choix.

Tout d'abord remarquons que $\det(Q)$ ne dépend pas de la \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$ et du point choisis pour identifier Φ_ψ à $\mathbb{R}^{D \cdot L}$ (c'est encore une conséquence du fait que la matrice de changement de bases a pour déterminant ± 1).

Soient φ_0 un flot fixé (à valeurs dans \mathbb{R}^D) prolongeant ψ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_L)$ une \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$. Rappelons qu'on lui associe une base de l'espace vectoriel

dirigeant Φ_ψ par (38). Alors, on a la description de Φ_ψ suivante :

$$\mathbb{R}^{D \cdot L} \xrightarrow{\sim} \Phi_\psi$$

$$(k_{i,j})_{\substack{i=1\dots L \\ j=1\dots D}} \mapsto \left(e \mapsto \left(\varphi_0(e)_j + \sum_{i=1}^L k_{i,j} \varphi_i(e) \right)_{j=1\dots D} \right).$$

D'où la réécriture de l'intégrale centrale dans (41) :

$$\int_{\Phi_\psi} \exp \left(- \sum_{e \in E} \alpha_e (\|\varphi(e)\|^2 + m^2) \right) d^{D \cdot L} \varphi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{D \cdot L}} \exp \left\{ - \sum_{e \in E} \alpha_e \left[\sum_{j=1}^D \left(\varphi_0(e)_j + \sum_{i=1}^L k_{i,j} \varphi_i(e) \right)^2 + m^2 \right] \right\} \prod_{\substack{i=1\dots L \\ j=1\dots D}} dk_{i,j}.$$
(45)

Avec cette écriture, on peut lire l'expression de la forme quadratique Q :

$$Q((k_{i,j})) = \sum_{e \in E} \alpha_e \left[\sum_{j=1}^D \left(\sum_{i=1}^L k_{i,j} \varphi_i(e) \right)^2 \right]$$
(46)

$$\varphi_Q((k_{i,j}^1), (k_{i,j}^2)) = \sum_{e \in E} \alpha_e \left[\sum_{j=1}^D \left(\sum_{i=1}^L k_{i,j}^1 \varphi_i(e) \right) \left(\sum_{i'=1}^L k_{i',j}^2 \varphi_{i'}(e) \right) \right]$$

$$= \sum_{e \in E} \alpha_e \left[\sum_{j=1}^D \left(\sum_{\substack{i=1\dots L \\ i'=1\dots L}} \varphi_i(e) \varphi_{i'}(e) k_{i,j}^1 k_{i',j}^2 \right) \right]$$

$$(Mat Q)_{(i,j),(i',j')} = \delta_{j,j'} \sum_{e \in E} \alpha_e \varphi_i(e) \varphi_{i'}(e)$$
(47)

$$\det Q = \left[\det \left(\sum_{e \in E} \alpha_e \varphi_i(e) \varphi_{i'}(e) \right)_{\substack{i=1\dots L \\ i'=1\dots L}} \right]^D.$$
(48)

Il reste à calculer le déterminant entre crochets que nous noterons $U_\Gamma(\alpha)$. C'est un polynôme en les α_e . La matrice en question s'écrit naturellement comme un produit de trois matrices avec celle du milieu diagonale.

$$\left(\sum_{e \in E} \alpha_e \varphi_i(e) \varphi_{i'}(e) \right)_{\substack{i=1\dots L \\ i'=1\dots L}} = (\varphi_i(e))_{i=1\dots L} \cdot (\delta_{e,e'} \alpha_e)_{e,e' \in E} \cdot (\varphi_i(e))_{i=1\dots L}.$$

Nous noterons $\Phi \in \mathcal{M}_{L,|E|}(\mathbb{Z})$ le premier terme, le troisième étant simplement sa transposée. Ces matrices ne sont pas carrées, on ne peut donc pas utiliser la multiplicativité du déterminant mais il existe une formule la généralisant :

Lemme 3.4 (formule de Binet-Cauchy). *Soit deux matrices P, Q de taille respective m, n et n, m (avec $n \geq m$). Si I est un sous-ensemble à m éléments de $\{1, \dots, n\}$, on notera $\det_I(P)$ (resp. $\det_I(Q)$) le déterminant de la sous-matrice de P (resp. Q) formée par les m colonnes (resp. lignes) indexées par les éléments de I . Alors*

$$\det(PQ) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \det_I(P) \cdot \det_I(Q) \quad (49)$$

Démonstration : Notons (e_1, \dots, e_n) (resp. (f_1, \dots, f_m)) la base canonique de \mathbb{R}^n (resp. de \mathbb{R}^m) et regardons les applications canoniquement associées à P et Q

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{PQ} & \mathbb{R}^m \\ & \searrow Q & \nearrow P \\ & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Ce diagramme induit le suivant en degré m dans l'algèbre extérieure :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^m(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R} & \xrightarrow{\det(PQ)} & \Lambda^m(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R} \\ & \searrow \Lambda^m(Q) & \nearrow \Lambda^m(P) \\ & & \Lambda^m(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Or $\Lambda^m(\mathbb{R}^n)$ est un espace vectoriel de base $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$, $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ ($i_1 < \dots < i_m$) décrivant l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \dots, n\}$. On peut donc écrire, après avoir fixé une fois pour toutes l'isomorphisme $\Lambda^m(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}$ envoyant $f_1 \wedge \dots \wedge f_m$ sur 1 :

$$\begin{aligned} \Lambda^m(Q)(1) &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \beta_I e_I \\ \det(PQ) &= \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \beta_I \Lambda^m(P)(e_I). \end{aligned} \quad (50)$$

Or $\Lambda^m(P)(e_I)$ est exactement le déterminant de l'application P restreinte à $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}$ (où la base de l'espace de départ est évidemment $(e_i)_{i \in I}$), i.e. $\det_I(P)$. Il reste ensuite à calculer β_I qui ne dépend que de Q . On peut le faire en écrivant (50) pour $P = P_{I^0}$ définie par

$$P_{I^0}(e_i) = \begin{cases} f_k & \text{si } i = i_k^0 \in I^0 \\ 0 & \text{si } i \notin I^0 \end{cases}$$

Alors $\Lambda^m(P_{I^0})(e_I) = \delta_{I^0, I}$ et on trouve

$$\beta_I = \det(P_{I^0}Q) = \det_I(Q)$$

□

Grâce à la m -linéarité du déterminant, on peut bien sûr généraliser immédiatement au cas d'un produit de trois matrices dans lequel le terme du milieu est une matrice carrée diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. La formule (49) devient :

$$\det(PDQ) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=m}} \left(\det_I(P) \cdot \det_I(Q) \cdot \prod_{i \in I} d_i \right) \quad (51)$$

En appliquant cette nouvelle formule à notre cas de figure, on trouve :

$$U_\Gamma(\alpha) = \sum_{\substack{E' \subset E \\ |E'|=L}} \left[(\det_{E'}(\Phi))^2 \prod_{e \in E'} \alpha_e \right]. \quad (52)$$

Il reste seulement à calculer $(\det_{E'}(\Phi))^2$, c'est-à-dire le coefficient de $\prod_{e \in E'} \alpha_e$ dans $U_\Gamma(\alpha)$. Comme ce polynôme ne dépend pas de la \mathbb{Z} -base de $H_1(\Gamma)$ initialement choisie, $(\det_{E'}(\Phi))^2$ non plus. Nous pouvons donc, grâce au lemme 3.2, choisir pour chaque E' une base dans laquelle $\Phi_{E'}$ s'écrit très simplement. L'ensemble $E \setminus E'$ ayant exactement $|V| - 1$ sommets, nous sommes dans un des deux cas suivants :

1. $E \setminus E'$ est un arbre couvrant T . Alors, si l'on choisit une base de flots unitaires associés à des circuits (orientés comme e_i) dans $T \cup \{e_i\}$, $\Phi_{E'}$ est la matrice identité. Son déterminant au carré vaut donc 1.
2. $E \setminus E'$ contient un circuit C . Alors, dans une base complétant C , $\Phi_{E'}$ a sa première ligne nulle. Son déterminant vaut donc 0.

Finalement, on a une écriture du dénominateur de l'intégrale à partir de la combinatoire du graphe :

$$\det(Q) = \left[\sum_{\substack{T \text{ arbre} \\ \text{couvrant}}} \prod_{e \notin T} \alpha_e \right]^D. \quad (53)$$

3.4 Régularisation dimensionnelle

Pour contourner les problèmes de convergence, une approche naturelle est de déformer la fonction à intégrer en introduisant un paramètre z telle que l'intégrale soit convergente pour $\Re(z)$ assez grand. Cela peut se faire dans la forme initiale (39) ou après introduction des paramètres de Schwinger. Rappelons que l'intégrale, après cette substitution, peut être mise sous la forme suivante (pour les valeurs de D pour lesquelles elles convergent) :

$$I(\psi) = \int_{[0; \infty[^{|E|}} \left(\frac{\pi}{U_\Gamma(\alpha_e)} \right)^{D/2} \exp(f(\alpha, \psi)) \prod_{\alpha \in E} d\alpha_e. \quad (54)$$

Pour donner une valeur au cas $D = 4$, il y a bien sûr différentes façons de déformer la fonction à intégrer (appelées schémas de régularisation) qui donnent des valeurs renormalisées différentes mais il existe des moyens de passer d'un schéma à l'autre. Nous nous contenterons ici de présenter un seul schéma, la régularisation dimensionnelle :

$$I(\psi, z) = \int_{[0; \infty[^{|E|}] \left(\frac{\pi}{U_\Gamma(\alpha_e)} \right)^{(4-2z)/2} \exp(f(\alpha, \psi)) \prod_{\alpha \in E} d\alpha_e \quad (55)$$

Remarque 12. Le calcul explicite de $f(\alpha, \psi)$ ne fait pas apparaître explicitement la dimension D de l'espace-temps. Il s'agit donc bien de remplacer formellement la dimension D par une variable continue $4 - 2z$ qui peut maintenant tendre vers 4. L'avantage est que, physiquement, cela conserve toutes les symétries, contrairement aux méthodes qui consistent à tronquer l'intégrale. Le défaut est que cela ne correspond pas à une réalité physique... pour l'instant.

Dans le cas d'un graphe à 4 pattes, cette intégrale converge pour $\Re(z) > 0$. En fait, elle peut même être définie sur un voisinage de $z = 0$ grâce au résultat suivant (vrai quelque soit le nombre de pattes extérieures) :

Proposition 3.5. *L'intégrale (55) est définie pour $\Re(z)$ suffisamment grand et admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} .*

Démonstration : La première partie de l'énoncé est évidente. Pour la deuxième, la régularité des intégrales de ce type a été étudiée par Bernstein qui donne une solution assez générale à ce problème (c.f. [8] pour une solution condensée). Cependant dans le cas présent, on peut donner une solution plus élémentaire (et plus proche du travail de Hepp) grâce à la forme particulière du polynôme $U_\Gamma(\alpha)$ établie dans le paragraphe précédent.

Découpons le domaine d'intégration en $|E|!$ parties selon l'ordre des α_e . Il suffit de démontrer le résultat sur chacune de ces parties. Cela se ramène (quitte à renommer) à étudier l'intégrale sur la partie définie par $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{|E|} \geq 0$. On effectue le changement de variables suivant :

$$u_1 = \alpha_1, u_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \dots, u_{|E|} = \frac{\alpha_{|E|}}{\alpha_{|E|-1}}, \quad (56)$$

$$\alpha_1 = u_1, \alpha_2 = u_1 \cdot u_2, \dots, \alpha_{|E|} = u_1 \cdot \dots \cdot u_{|E|}.$$

Le nouveau domaine d'intégration est $[0; \infty[\times [0; 1]^{|E|-1}$. Il faut regarder comment se réécrit $U_\Gamma(\alpha)$ en fonction des u .

Lemme 3.6. *Notons \leq_k l'ordre induit par $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{|E|}$ sur les parties à k éléments de E i.e. si $I = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ et $J = \{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ sont deux ensembles ordonnés de $|E|$, $I \leq_k J$ ssi $i_l \leq j_l \forall l = 1 \dots k$. Alors l'ensemble des complémentaires d'arbre couvrant admet un minimum pour \leq_L .*

Le passage au complémentaire définit une bijection d'ensembles ordonnés

$$(\mathcal{P}_k(E), \leq_k) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}_{|E|-k}(E), (\leq^{\text{op}})_{|E|-k}).$$

On peut donc démontrer le lemme pour l'ensemble des arbres couvrants. Notons alors $n(k)$ le nombre de composantes connexes du graphe $(V, H, \{e_1, \dots, e_k\})$. On a clairement :

$$\begin{aligned} n(0) &= |V| \\ n(|E|) &= 1 \\ \forall k = 1 \dots |E|, n(k) &= \begin{cases} n(k-1) \\ n(k-1) - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

La famille $A = (e_k)_k$ tq $n(k) = n(k-1) - 1$ a donc $|V| - 1$ éléments. Or elle ne contient pas de circuits non triviaux. En effet, sinon cela signifierait qu'une des arêtes e_k relie deux points qui sont déjà reliés par des arêtes e_j d'indices plus petits. Pour ce k , on aurait alors $n(k) = n(k-1)$ d'où la contradiction. A est donc un arbre couvrant. De plus, c'est un minimum car un arbre couvrant ne peut contenir plus de $V - n(k)$ arêtes parmi $\{e_1, \dots, e_k\}$. Ceci démontre donc le lemme. Revenons à la proposition en traduisant ce résultat combinatoire sur notre polynôme.

$$I \leq J \Rightarrow \prod_{i \in I} \alpha_i(u_1, \dots, u_n) \text{ divise } \prod_{j \in I} \alpha_j(u_1, \dots, u_n) \text{ dans } \mathbb{C}[u_1, \dots, u_{|E|}]$$

Le lemme démontre que $U_\Gamma(\alpha)$ est de la forme

$$M(u) \cdot (1 + P(u)) \text{ où } \begin{cases} M(u) \text{ est le monôme en les } u \text{ correspondant} \\ \text{au minimum,} \\ P(u) \text{ est un polynôme à coefficients positifs} \\ \text{sans terme constant en les } u. \end{cases}$$

La fin de la démonstration ne nécessite pas d'idées supplémentaires, mais pose des difficultés techniques (il faudrait introduire les fonctions méromorphes à valeurs dans un espace de distributions comme dans [8], ce qui n'est pas le propos ici). On se contentera de donner une idée de la suite de la preuve. Le changement de variables donne :

$$\frac{I(\psi, z)}{\pi^{2-z}} = \sum_{\text{ordres}} \int_{[0; \infty[\times [0; 1]^{|E|-1}} \frac{u_1^{|E|-1} \dots u_{|E|-1} du_1 \dots du_{|E|}}{(M(u))^{2-z} (1 + P(u))^{2-z}} \exp(f(\alpha, \psi)) \quad (57)$$

Il est facile de voir que f est une fraction rationnelle en les u_i et que l'exponentielle est une fonction à décroissance rapide en u_1 au sens de Schwartz. Seule la convergence en 0 pose problème pour $\Re(z)$ petit. Mais par intégration par parties, on peut augmenter le domaine sur lequel l'intégrale est bien définie (et est holomorphe) d'une bande de largeur 1 (comme pour la fonction Γ d'Euler, mais sans obtenir d'équation fonctionnelle). Finalement, on obtient une fonction méromorphe sur \mathbb{C} . \square

L'intégrale (55) admet donc un développement asymptotique en $z = 0$ qui servira à calculer la valeur renormalisée. Malheureusement, comme la démonstration ci-dessus, le calcul de ce développement est assez complexe.

4 Renormalisation

4.1 Approche historique

Le calcul de la partie 3 aboutit à associer à chaque graphe de Feynman une série de Laurent en z qui diverge en $z = 0$. Pour trouver des valeurs finies comme on en observe expérimentalement, il faut donc retirer un contre-terme divergent de telle manière que la différence soit finie.

Ces séries ont une décomposition naturelle en partie convergente et divergente :

$$\begin{aligned} \text{Si } C &= \sum_{n=-N}^{\infty} c_n \cdot z^n, \\ \text{on pose } R(C) &= \sum_{n=-N}^{-1} c_n \cdot z^n && \text{(partie divergente)} \\ \text{et } (1 - R)(C) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n && \text{(partie convergente)} \end{aligned}$$

Une manière simple de trouver des contre-terme serait de choisir la partie divergente de la série associée à chaque graphe. Malheureusement, cette méthode ne donne un résultat compatible avec l'expérience que pour les graphes "simples" (i.e. n'ayant pas de sous-graphes divergents).

Dès les années 70, Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann ont démontré que si l'on retirait à l'intérieur de l'intégrale (39) des termes correspondant aux sous-graphes divergents, cela rendait l'intégrale convergente (voir [2] pour plus de précisions). Bien qu'il n'existe pas de théorème équivalent avec la régularisation dimensionnelle, tenir compte des sous-graphes divergents dans le calcul du contre-terme donne des résultats physiques plus probants (et même mathématiques, pour un prolongement des multilogarithmes à certaines valeurs où ils ne sont pas définis).

Dans ses travaux, Bogoliubov donne un algorithme pour calculer ces contre-terme. Connes et Kreimer (c.f. biblio [6]) ont découvert récemment une description mathématique de cet algorithme que nous allons présenter ici. Cela utilise la structure décrite dans la partie 2.

4.2 Décomposition de Birkhoff

Nous allons voir dans cette partie sur les matrices que, dans un certain contexte, il existe une autre façon intéressante de choisir les contre-terme. Cette méthode aura en outre l'avantage de vérifier une propriété de stabilité intéressante, qui n'est pas vrai quand on prend la partie convergente terme à terme. Cet exemple de renormalisation matricielle s'appliquera ensuite à celle des intégrales de Feynman.

4.2.1 Décomposition multiplicative

La méthode naïve de choix des contre-terme revient à écrire une matrice $M(z, \frac{1}{z})$ comme somme de deux matrices ne contenant respectivement que des puissances positives ou strictement négatives de z .

$$M(z, \frac{1}{z}) = M_1(z) + M_2(\frac{1}{z}) \tag{58}$$

Cette décomposition existe et est bien sûr unique pour toute matrice M .

Il est alors naturel de se poser la question pour une décomposition semblable multiplicative. Or, pour une certaine classe de matrices (qui est celle qui nous intéresse ici), on a la réponse suivante :

Proposition 4.1 (Décomposition de Birkhoff). *Soit M une matrice triangulaire inférieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]])$ avec une diagonale de 1. Alors il existe un unique couple de matrices (M_+, M_-) tel que :*

- $M_+ - I_n$ (resp. $M_- - I_n$) est triangulaire inférieure stricte et tous ses coefficients ne contiennent que des puissances positives (resp. strictement négatives) de z
- $M = M_- \cdot M_+$

Démonstration : En écrivant notre équation coefficient par coefficient, on obtient un système de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_{i+1,i}^- + m_{i+1,i}^+ = m_{i+1,i} & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ m_{i+2,i}^- + m_{i+2,i}^+ = m_{i+2,i} + f_i^2 \left((m_{j+1,j}^\pm)_{1 \leq j \leq n-1} \right) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-2 \\ \vdots & \vdots \\ m_{i+k,i}^- + m_{i+k,i}^+ = m_{i+k,i} + f_i^k \left((m_{j,l}^\pm)_{1 \leq j-l < k} \right) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-k \\ \vdots & \vdots \\ m_{n,1}^- + m_{n,1}^+ = m_{n,1} + f_1^{n-1} \left((m_{j,l}^\pm)_{1 \leq j-l < n-1} \right) \end{array} \right.$$

où les f_i^k sont des polynômes. Il suffit maintenant d'utiliser l'existence et l'unicité de la décomposition additive pour un élément de $\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]]$. On en déduit immédiatement que la première ligne admet une unique famille $(m_{i+1,i}^-, m_{i+1,i}^+)$ solution. Pour cette famille de valeur de la sous-diagonale, la seconde ligne du système (vue comme équations en $(m_{i+2,i}^-, m_{i+2,i}^+)_{1 \leq i \leq n-2}$) a une unique famille solution aussi. Et ainsi de suite... Une récurrence immédiate montre que ce système admet une unique solution. \square

4.2.2 Comportement dans un groupe algébrique

À certaines matrices M , on peut donc associer des matrices M_- et M_+ . On peut naturellement se demander si les propriétés de M se transmettent à M_+ et M_- . C'est vrai pour toutes les propriétés algébriques. Plus précisément,

Théorème 4.2 (stabilité par décomposition de Birkhoff). *Soit $G \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]])$ un sous-groupe algébrique de $Uni = I_n + T_n^+$ (T_n^+ désignant l'ensemble des matrices n, n nilpotentes triangulaires inférieures) défini par des équations polynômiales dont les variables sont les coefficients de la matrice et les coefficients des éléments de \mathbb{C} . Alors, si g appartient à G , g_+ et g_- aussi.*

Démonstration : Commençons par rappeler un résultat classique sur les groupes algébriques. Si on note \mathcal{G} l'algèbre de Lie associée au groupe $G \subset Uni$,

l'exponentielle $\mathcal{G} \mapsto G$ est bijective. L'idée est qu'une décomposition multiplicative dans G s'obtient "presque" à partir d'une décomposition additive dans \mathcal{G} .

Lemme 4.3. *Si G est un groupe algébrique vérifiant les hypothèses du théorème, alors \mathcal{G} est stable par décomposition additive.*

Pour ce lemme, seule la structure d'espace vectoriel de \mathcal{G} compte. Celle-ci provient de la définition de \mathcal{G} comme espace tangent à G en 1. Le groupe G étant défini comme le lieu des zéros d'un certain nombre d'équations polynômiales, \mathcal{G} est définie comme le lieu des zéros de leur différentielle en 1. Les premières étant polynômiales à coefficients dans \mathbb{C} , les secondes sont linéaires à coefficients dans \mathbb{C} . Or si l est une telle équation et si on note $m_{i,j} = \sum_{-N}^{\infty} m_{i,j}^n z^n$, on a,

$$l((m_{i,j})) = \sum_{-N}^{\infty} l((m_{i,j}^n))z^n$$

$$\text{Et donc } l((m_{i,j})) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{Z}, l((m_{i,j}^n)) = 0$$

Ainsi la partie divergente et la partie convergente de M définies respectivement par $m_{i,j}^{+,n} = \delta_{n \geq 0} m_{i,j}^n$ et $m_{i,j}^{-,n} = \delta_{n < 0} m_{i,j}^n$ vérifient cette dernière condition si M la vérifie, ce qui démontre le lemme.

Soit $g \in G$. On peut alors effectuer la décomposition additive de l'unique élément de $n \in \mathcal{G}$ tel que $\exp(n) = g$:

$$n = n_+ + n_-$$

Malheureusement, comme il n'est pas vrai en général que n_+ et n_- commutent, on ne peut conclure directement que $g = \exp(n_-) \cdot \exp(n_+)$. Mais il est quand même intéressant de regarder l'élément $g' := \exp(n_-)^{-1} \cdot g \cdot \exp(n_+)^{-1}$

Lemme 4.4. *Si $g - 1$ vérifie*

$$\forall (i, j) \text{ t.q. } i - j \leq k, (g - 1)_{i,j} = 0, \quad (59)$$

alors $g' - 1$ vérifie

$$\forall (i, j) \text{ t.q. } i - j \leq k + 1, (g' - 1)_{i,j} = 0.$$

Sous les hypothèses de ce lemme, n est alors (comme $g - 1$) de degré k (i.e. vérifie (59)). En effet, cela vient de la formule :

$$n = \log(g) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(g-1)^i}{i}.$$

On en déduit que n_+ et n_- sont aussi de degré k . C'est donc aussi le cas de g' . La $(k+1)$ -ième sous-diagonale de ces trois matrices est aussi facile à évaluer car

celle de n provient uniquement du terme $i = 1$ dans la somme ci-dessus et est donc égale à celle de g . On a :

$$n_{i+k+1,i}^- = R(g_{i+k+1,i}), \quad (60)$$

$$n_{i+k+1,i}^+ = (Id - R)(g_{i+k+1,i}), \quad (61)$$

$$g'_{i+k+1,i} = -(Id - R)(g_{i+k+1,i}) + g_{i+k+1,i} - R(g_{i+k+1,i}) = 0, \quad (62)$$

ce qui démontre le lemme.

On conclut alors facilement en posant $g_0 = g$, $g_1 = g'$, $g_2 = (g')'$, *etc...* Le lemme et une récurrence immédiate démontrent que

- $g_k - 1$ est de degré k ;
- $g_k = h_k \cdot g \cdot j_k$ avec j_k (resp h_k) dans G et ne faisant apparaître que des puissances positives (resp. strictement négatives) de z .

Comme le seul élément de degré $n - 1$ est 0 on a

$$g = (h_{n-1})^{-1} \cdot (j_{n-1})^{-1}. \quad (63)$$

Par unicité, il s'agit de la décomposition de Birkhoff de g dont les éléments appartiennent donc à G . \square

4.3 Algorithmes

4.3.1 Formulation théorique

Nous avons maintenant tous les éléments permettant de décrire l'algorithme de renormalisation.

- La partie 3 associe à chaque graphe une série de Laurent divergente (déformation de l'intégrale à calculer) i.e. décrit une fonction que nous noterons :

$$\mathcal{I} : \left\{ \begin{array}{l} \text{graphes de Feynman 1PI} \\ \text{à 2 ou 4 pattes} \end{array} \right\} \longrightarrow \mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]]$$

Nous nous intéresserons à sa restriction \mathcal{I}_n à l'ensemble H_n des graphes ayant au plus n boucles. Comme $\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]]$ est une algèbre commutative, \mathcal{I}_n s'étend à l'algèbre commutative libre sur H_n , en un morphisme d'algèbres de manière unique.

- Nous avons par ailleurs dans la partie 2 décrit une structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre commutative libre \mathcal{H}_n sur H_n . Tout morphisme d'algèbres \mathcal{H}_n dans \mathbb{C} peut alors être vu comme un élément du groupe algébrique $G_n \subset M_N(\mathbb{C})$. A $\Gamma \mapsto f(\Gamma)$ est ainsi associé l'élément de G_n paramétré par les $c_\Gamma = \frac{|H_{\text{ext}}(\Gamma)|!}{s(\Gamma)} f(\Gamma)$. On peut donc étendre cette identification aux morphismes d'algèbre de $\mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]]$ en leur associant un élément dans $G_z \subset M_N(\mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]])$, groupe algébrique décrit par les mêmes équations polynômiales que G . Ce groupe existe car la construction du 2.2 peut être faite sur n'importe quel corps de base.

- G_z est défini par des équations polynômiales à coefficients dans \mathbb{C} . Les deux parts de la décomposition de Birkhoff d'un de ses éléments sont donc aussi dans G_z .

En effectuant la décomposition de Birkhoff de \mathcal{I}_n vu dans G_z , on obtient une partie convergente $\mathcal{I}_n^{\text{cv}}$ et une partie divergente C (pour "contre-terme"). Ces deux éléments de G_z peuvent être vus comme des fonctions de $H_n \rightarrow \mathbb{C}[[z, \frac{1}{z}]]$. Notons que le résultat obtenu pour $\mathcal{I}^{\text{cv}}(\Gamma)$ ne dépend pas du $n \geq L_\Gamma$ choisi.

Théorème 4.5 (Connes et Kreimer). *Le terme constant (i.e. la valeur pour $z = 0$) de $\mathcal{I}^{\text{cv}}(\Gamma)$ donne la valeur renormalisée de l'intégrale (39).*

Dans leur article [6], A. Connes et D. Kreimer démontrent que l'algorithme décrit ci-dessus (en terme de décomposition de Birkhoff) correspond à celui qui était proposé dans les années 70 par Bogoliubov.

4.3.2 Point de vue plus calculatoire

Notre description précise du groupe G permet d'écrire la matrice de l'élément de G_z correspondant à la fonction \mathcal{I}_n . On peut alors en calculer la décomposition de Birkhoff explicitement : on a vu dans la preuve de 4.1 qu'il s'agissait d'un système triangulaire. On peut néanmoins faire une remarque simplifiant encore le calcul en utilisant le fait que les deux premières colonnes d'un élément de G_z le décrivent entièrement :

Lemme 4.6. *Soit \mathcal{I}'_n la matrice donnée par les deux premières colonnes de \mathcal{I}_n . La partie divergente de la décomposition de Birkhoff est alors l'unique élément $C \in G_z$ tel que $C^{-1} \cdot \mathcal{I}'_n$ soit à coefficients dans $\mathbb{C}[[z]]$.*

Démonstration : Soit $C \in G_z$ qui convient. Alors $M := C^{-1} \cdot \mathcal{I}_n$ est un élément de G_z dont les coefficients des deux premières colonnes sont dans $\mathbb{C}[[z]]$. Les autres coefficients étant des polynômes en ceux-ci (description de G_z), M est dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C}[[z]])$. $C \cdot M$ est donc la décomposition de Birkhoff de \mathcal{I}_n d'où l'unicité de C . □

Cet élément peut être cherché sous la forme de l'exponentielle d'un élément de l'algèbre de Lie \mathcal{G}_z dont la combinatoire est plus facile. Les valeurs renormalisées des intégrales se lisent alors directement dans les deux colonnes de $C^{-1} \cdot \mathcal{I}_n$. L'algorithme est illustré par un exemple traité dans l'annexe 6.

Remarque 13 (Que devient ψ ?). Cet algorithme est une façon condensée de donner pour chaque graphe une formule du type :

$$I_{\text{ren}}(\Gamma) = (I - R) \left(I(\Gamma) - \sum_{E_0} C(\dots) I(\Gamma/E_0) \right)$$

Or $I(\Gamma)$, $C(\dots)$, et $I(\Gamma/E_0)$ dépendent de fonctions ψ qui ne sont *a priori* pas reliées. Heureusement, il y a une bijection *canonique* entre les fonctions sur les pattes extérieures de Γ et celles sur les pattes extérieures de Γ/E_0 . De plus, les

$C(\dots)$ ne dépendent d'aucun ψ . Donnons une justification heuristique. Chaque $C(\dots)$ est la partie divergente d'une intégrale du type (39) à laquelle on a enlevé des termes correspondant aux sous-graphes. Un théorème de BPHZ (c.f. [2]) montre que si on retire le terme correspondant pour $\psi = 0$ à l'intérieur de cette intégrale, le résultat est convergent. On en déduit que seule la partie convergente est modifiée lorsque l'on change ψ .

Conclusion

Nous avons expliqué ici comment l'algorithme pour renormaliser les intégrales de Feynman en théorie quantique des champs s'exprime avec des outils mathématiques sophistiqués. L'introduction du groupe de la partie 2 permet de faire le lien entre deux formulations "duales" : regarder les sous-graphes ou les insertions. L'enjeu de ces structures est de mieux comprendre les valeurs renormalisées et les contre-termes. Une piste est d'étudier par des méthodes algébriques les polynômes U_Γ et certaines questions sont alors semblables à des problèmes de théorie des nombres (les valeurs de ζ sur les entiers peuvent s'écrire comme des intégrales du même type)...

Bibliographie

Sur la renormalisation

- [1] P.Cartier et C. De Witt-Moretti, *Functional integration : action and symmetry*, chap 15 *Renormalization 1 : an introduction* et chap 17 *Renormalization 3 : Combinatorics*, 2006, livre à venir.
- [2] V. Rivasseau, *An introduction to renormalization*, Séminaire Poincaré (Paris, 12 Octobre 2002), publié dans : *Duplantier, Bertrand; Rivasseau, Vincent (Eds.) ; Poincaré Seminar 2002, Progress in Mathematical Physics 30*, Birkhäuser (2003).
- [3] N.Nakanishi, *Graph theory and Feynman integrals*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971.
- [4] K.Ebrahimi-Fard et L.Guo, *Matrix representation of Renormalization in Perturbative Quantum Field Theory*, arXiv preprint hep-th/0508155, 2005.
- [5] B.Kastening, *Recursive Graphical Construction of Feynman diagrams in ϕ^4 theory : Asymmetric case and effective energy*, Phys. Rev. E **61**, 3501-3528 (2000).
- [6] A.Connes et D.Kreimer, *Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem I : The Hopf Algebra Structure of Graphs and the Main Theorem*, Comm. Math. Phys., volume **210**, pages 249-273, Springer.

Sujets annexes

- [7] F.R. Gantmacher, *Théorie des matrices*, Dunod, Paris, 1966.
- [8] P.Garrett, *Bernstein's analytic continuation of complex powers*, disponible en ligne, 1995.
- [9] A. Borel, *Linear algebraic groups* (2nd edition), Springer, 1991.
- [10] A.Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.