# La formule de Black et Scholes

Feray, Guéant, Hoeschler

4 juillet 2004

**Résumé**

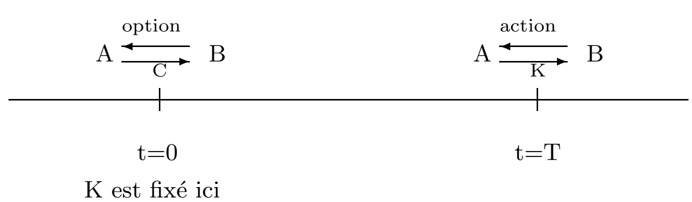
Cet exposé a pour but de présenter une infime partie de cette branche, à la frontière des mathématiques et de l'économie, qu'est la Finance. Plus précisément l'objet de ce papier est de présenter la célèbre formule de Black et Scholes sur le prix d'une option d'achat.

## 1 Introduction aux options d'achat.

### 1.1 Définition et première approche.

Pour commencer, introduisons la notion centrale de l'exposé : les options d'achat sur des actions (call en anglais).

**Définition 1 (Option d'achat)** *Une option d'achat ou call est un instrument financier.*
*Il y a un vendeur et un acheteur. L'acheteur verse à la date* 0 *une somme* $C$ *au vendeur pour acquérir une option d'achat sur une action donnée. Cette option lui donne le droit d'acheter ladite action à l'instant* $T$ *à un prix* $K$ *(appelé prix d'exercice) fixé lors de l'achat de l'option (i.e. à l'instant 0).*




En fait la transaction au temps $t = T$ ne se produit que si elle profite à l'acheteur, c'est-à-dire si le cours de l'action à l'instant $T$ est supérieur au prix d'exercice $K$.

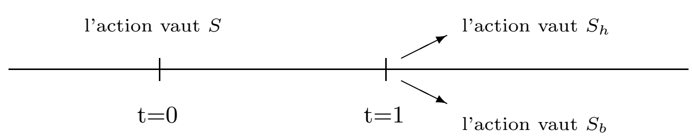
Remarques :
- En plus des options d'achat (call), il existe de manière symétrique des options de vente (put) dont il ne sera pas question ici.
- On distingue en fait deux types d'option, les options européennes dont la date d'exercice est fixée au préalable et les options américaines utilisables non pas à un instant précis mais sur une période donnée. A noter qu'ici, il ne sera question que d'options européennes.

– D'après les informations communiquées par Euronext, les options d'achat ne sont pas uniquement des instruments théoriques puisque en pratique plus de 16 millions de calls ont été achetés sur la période qui va de Janvier 2004 à Février 2004.

Problème : La question qui se pose est bien entendu d'estimer le prix $C$ du call et ce sera l'objet de tout cet exposé puisque c'est justement à cette question que répond la formule de Black et Scholes.

## 1.2 Un cas simple

Commençons donc à réfléchir à la question sur un modèle simpliste mais formateur.
Pour cela plaçons nous dans le cas d'un marché financier purement fictif qui ferait intervenir deux instants 0 et 1 et comporterait une action (actif risqué) et un placement sans risque comme un livret d'épargne dont le taux d'intérêt sera $r > 0$ dans la suite. Concernant l'actif risqué, son prix à l'instant initial est $S$ et son prix à la date 1 peut être soit $S_b$ (prix bas) soit $S_h$ (prix haut). On parle de système à deux dates et deux états.




(système à deux dates et deux états ($S_b < S_h$))

Pour pouvoir estimer quel pourrait être le prix $C$ de l'option introduisons les concepts de portefeuille et de portefeuille de couverture.

**Définition 2 (Portefeuille)** *Un portefeuille est un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ où $\alpha$ correspond à l'actif non risqué et $\beta$ à l'action. Il est à noter que les variables peuvent prendre des valeurs négatives, ce qui peut paraître de prime abord étrange mais correspond par exemple dans les faits à un emprunt.*

On définit de manière triviale la valeur d'un portefeuille aux différents instants : par exemple la valeur du portefeuille $(\alpha, \beta)$ est à l'instant initial $\alpha + S\beta$ et devient à l'instant suivant $\alpha(1 + r) + S_h\beta$ ou $\alpha(1 + r) + S_b\beta$ selon que l'on soit dans l'état haut ou bas.

**Définition 3 (Portefeuille de couverture)** *Un portefeuille de couverture est un portefeuille $(\alpha, \beta)$ qui "joue le même rôle" que l'option. On l'appelle ainsi car il couvre le vendeur du call contre toute perte comme on va le voir par la suite.*
*On a, dans le cas où $S_b < K < S_h$ :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(1 + r) + \beta S_h = S_h - K \\ \alpha(1 + r) + \beta S_b = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

En fait, si l'action est au temps 1 au prix haut alors l'exercice du call rapporte à son détenteur $S_h - K$. Par contre si nous sommes dans le cas d'un prix bas, l'option d'achat ne sera pas utilisée et ne rapportera rien à son détenteur.

Supposons donc qu'avec la somme $C$ correspondant à l'achat du call le vendeur se constitue un portefeuille de couverture $(\alpha, \beta)$, alors ce portefeuille couvrira toutes ses pertes potentielles. De fait, si à l'instant 1 le détenteur du call veut exercer son droit d'acheter l'action au prix d'exercice $K$ (i.e. si le prix de l'action est $S_h$), grâce à la somme $S_h - K$ de son portefeuille de couverture il pourra acheter une action au prix $S_h$ et la revendre comme convenu au détenteur de l'option tout en restant "in the money". De même, si le prix de l'action à l'instant 1 est le prix bas, rien ne se passe et comme le portefeuille de couverture ne représente plus rien, le vendeur du call n'a rien perdu...
On a donc trouvé un prix "honnête" pour l'option : $C = \alpha + \beta S$ où les valeurs des variables $\alpha$ et $\beta$ sont données par le système ci-dessus.
En résolvant on trouve le prix d'une option d'achat dans les conditions décrites précédemment.

$$C = \frac{S_h - K}{S_h - S_b}(S - \frac{S_b}{1+r}) \tag{2}$$

Remarque :

Ce prix peut se justifier de plusieurs manières et nous en évoquerons une plus loin mais quoi qu'il en soit, il est évident que l'acheteur du call n'est pas prêt à mettre plus que $C$ car sinon il pourrait se constituer, avec la somme $C' > C$ un portefeuille qui lui rapporterait plus que l'option : par exemple en se constituant un portefeuille sur le modèle du portefeuille de couverture mais en rajoutant $C' - C$ sous forme d'actif non risqué.

En fait, il existe comme nous le laissions entendre une autre manière de définir le prix $C$ du call : ce prix se jutifie en terme d'abscence d'opportunité d'arbitrage.

**Définition 4 (Opportunité d'arbitrage)** *Une opportunité d'arbitrage se produit si partant d'un capital strictement négatif un agent peut se retrouver avec un capital strictement positif au temps* 1.

**Proposition 1** *Le prix $C$ de l'option est l'unique prix qui fasse en sorte qu'il y ait absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).*

## 1.3 Justification de l'utilisation d'un call.

Maintenant que nous savons ce que sont les options d'achat et comment connaitre leurs prix dans un cas d'école, il convient légitimement de s'interroger sur l'intérêt même de l'utilisation des calls en pratique vis-à-vis d'un achat pur et simple d'action.

Tout d'abord, du point de vue du vendeur du call, on a vu que le portefeuille de couverture permettait à ce dernier de ne pas perdre d'argent. Ensuite, si l'on se place du point de vue de l'acheteur du call, les gains sont bien entendus illimités mais les pertes sont limités à $C$.
En fait on peut aller plus avant dans la réflexion...

Si l'on se replace dans le modèle à deux dates et deux états, notons $\pi$ la probabilité de passage du prix $S$ au prix $S_h$ (et donc $1 - \pi$ est la

probabilité de passage au prix bas).
On peut définir l'espérance de rendement de l'actif par $m_S = \frac{\pi S_h + (1-\pi) S_b}{S}$ (le rapport entre ce que l'on touche à l'instant 1 et ce que l'on dépense à l'instant 0) et de même sa volatilité (écart-type) $v_S$ qui après calcul est donnée par $v_S = \frac{S_h - S_b}{S}\sqrt{\pi(1-\pi)}$.
De même on peut définir l'espérance de rendement de l'option par $m_C = \frac{\pi(S_h - K)}{C}$ (le rapport entre ce que l'on touche à l'instant 1 et ce que l'on dépense à l'instant 0) et sa volatilité $v_C$ qui après calcul est donnée par $v_C = \frac{S_h - K}{C}\sqrt{\pi(1-\pi)}$. (On s'est ici placé dans le cas où $S_b \leq K \leq S_h$).

On peut montrer la propriété suivante qui montre l'intérêt des calls :

**Proposition 2** *Avec les notation précedentes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} m_C \geq m_S \\ v_C \geq v_S \end{array} \right. \tag{3}$$

# 2 Le modèle dynamique en temps discret

## 2.1 Le modèle

On se place dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration croissante $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ où $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ qui modélise l'information à l'instant $n$. Le *marché financier* est composé de $d+1$ actifs dont les *prix à l'instant* $n$ sont donnés par $S_n = (S_n^0, S_n^1, \ldots, S_n^d) \geq 0$. On suppose que l'actif 0 est sans risque :

$$S_n^0 = (1+r)^n S_0^0 \tag{4}$$

Par commodit on pose $S_0^0 = 1$.

Une *stratégie de gestion* est une famille $\theta = (\theta_n)_{n=1}^N$ de vecteurs aléatoires $\theta_n = (\theta_n^0, \ldots, \theta_n^d)$ tels que $\theta_n^i$ est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable (processus prévisible). $\theta_n$ représente le portefeuille à l'instant $n$ : Sa *valeur* $V_n(\theta)$ est

$$V_n(\theta) = \theta_n . S_n = \sum_{i=0}^{d} \theta_n^i S_n^i \tag{5}$$

($V_n$ est evidemment $\mathcal{F}_n$ mesurable).

Notation : Pour des v.a.$(X_n)$ données, on note $\Delta X_n := X_n - X_{n-1}$.

Une stratégie de gestion est dite *auto-finançante* si

$$\theta_n . S_n = \theta_{n+1} . S_n \quad \forall n = 1, \ldots, N-1 \tag{6}$$

Ceci implique que

$$V_n(\theta) = V_{n-1}(\theta) + \theta_n . \Delta S_n \quad n \geq 1 \tag{7}$$

On pose alors $V_0(\theta) = \theta_1 . S_0$.

Interprétation :

- il n'y a pas d'apport externe au portefeuille
- on ne retire pas d'argent
- les transactions se font sans coût

Une *opportunité d'arbitrage* est une stratégie de gestion auto-finançante t.q.

$$V_0(\theta) = 0 \quad = \quad 1 \tag{8}$$
$$P(V_N(\theta) \geq 0) \quad = \quad 1 \quad , \quad P(V_N(\theta) > 0) > 0 \tag{9}$$

Interprétation : Partant d'un capital nul, on est sûr de ne pas perdre de l'argent et on peut même faire un réel profit.. Dans un marché réel, on tente bien sûr de proscrire les opportunités d'arbitrages.

Le vecteur des *prix actualisés* est $\hat{S}$ où

$$\hat{S}^i_n = \frac{S^i_n}{S^0_n} \tag{10}$$

Interprétation : Pour pouvoir comparer une quantité d'argent à deux instants $n_1$ et $n_2$, on introduit cette normalisation. Cela permet de comparer un placement dans un actif risqué à un placement dans l'actif non risqué. On note que $S^0_n = (1+r)^n$ où $r$ est le taux d'intérêt ;

On introduit également la notation de la *valeur actualisée*

$$\hat{V}_n(\theta) := \frac{V_n(\theta)}{S^0_n} = \sum_{i=0}^{d} \theta^i_n \hat{S}^i_n = V_0(\theta) + \sum_{k=1}^{n} \theta_k \Delta \hat{S}_k \tag{11}$$

$$\hat{V}_0(\theta) = V_0(\theta) \tag{12}$$

Finalement, on définit que deux mesures de probabilité $P$ et $Q$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ sont *équivalentes* si pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 0 \iff Q(A) = 0 \tag{13}$$

## 2.2 Quelques résultats sans démonstration

**Lemme 2.1** *Supposons qu'il existe une probabilité $Q$ sous laquelle $\hat{S}$ est une martingale. Alors $\hat{V}_n(\theta)$ est une martingale sous $Q$ où $\theta$ est une stratégie auto-finançante.*

**Theorème 2.1** *Il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage (AOA = abscence d'opportunité d'arbitrage) ssi il existe une probabilité $Q$ équivalente à $P$ t.q. le vecteur des prix actualisés $\hat{S}$ soit une martingale sous $Q$.*

Une variable aléatoire $\mathcal{F}_N$-mesurable $X$ est dite *duplicable* (ou *hedgeable* en anglais) s'il existe une stratégie auto-finançante $\theta$ t.q. $V_N(\theta) = X$.

Un *marché est complet* si toute variable aléatoire $X$ $\mathcal{F}_N$-mesurable est duplicable, i.e. toute v.a. $X$ s'écrit sous la forme

$$X = \sum_{i=0}^{d} \theta^i_N S^i_N \tag{14}$$

**Theorème 2.2** *Soit $M$ un marché sans opportunité d'arbitrage (AOA). Alors $M$ est complet ssi il existe une seule probabilité $Q$ équivalente à $P$ pour laquelle les prix actualisés sont des martingales.*

## 2.3 La formule de Black et Scholes

### 2.3.1 Valorisation

On suppose qu'on est dans le cas d'un marché sans OA. On se donne une v.a. duplicable $X$ et une stratégie auto-finançante $\theta$ t.q. $V_N(\theta) = X$. On a le théorème suivant

**Theorème 2.3** *La valeur $V_0(\theta)$ ne dépend pas du choix de $\theta$, on l'appelle valeur de $X$ à l'instant 0. De plus, on a*

$$V_0(\theta) = E_Q\left[\frac{X}{S_N^0}\right] \tag{15}$$

*pour toute stratégie auto-finançante $\theta$ et pour toute probabilité $Q$ faisant des prix actualisés une martingale.*

Si le marché est complet et AOA, on peut donc valoriser toutes les v.a. $\mathcal{F}_N$-mesurables. Si $\hat{V}_n(\theta)$ est une $Q$ martingale on a

$$V_n(\theta) = S_n^0 E_Q\left[\frac{X}{S_N^0}|\mathcal{F}_n\right] \tag{16}$$

et en particulier

$$V_0(\theta) = E_Q\left[\frac{X}{S_N^0}\right] \tag{17}$$

On voit l'importance de cette formule quand on a un call qui doit etre effectué à l'instant $N$ sur l'actif $S^1$ et lorsque $S^0$ est un actif sans risque de rendement $r$. On a alors $X = (S_N^1 - K)^+$, c'est la valeur du call en temps $N$ (avec $K$ = prix auquel on peut acheter l'action à l'instant $N$). La formule (**??**) nous donne la valeur du call à l'instant 0 :

$$\frac{1}{(1+r)^N} E_Q[(S_N^1 - K)^+] \tag{18}$$

### 2.3.2 Le modèle binomial

Hypothèses :

- un actif sans risque de rendement $r$ constant
- une action dont le rendement entre $n$ et $n+1$ peut être $h$ ou $b$, avec $b < 1+r < h$
- à l'instant 0 l'action vaut $S$

On veut exclure les opportunités d'arbitrage, donc il faut trouver une probabilité t.q. $\hat{S}_n$ soit une martingale (on a vu que ceci implique que $\hat{V}_n$ soit une martingale sous la même probabilité).

Soit $\pi$ = probabilté que l'action monte de $n$ à $n+1$. Alors pour que $\hat{S}_n$ soit une martingale, on doit imposer

$$\pi = \frac{1+r-b}{h-b} \tag{19}$$

et cette probabilité est unique, donc le marché est complet et sans OA. On introduit alors l'écart type $\sigma$ de $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ sous cette probabilité. Soit $Q$ la probabilité associée, alors

$$Q(S_n = h^j b^{n-j} S) = \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} \tag{20}$$

donc on peut valoriser un call et en utilisant (**??**) on trouve

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^N} E_Q[(S_N - K)^+] && (21)\\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} \pi^j (1-\pi)^{N-j} (h^j b^{N-j} S - K)^+ && (22)\\ &= SB\left(N, \eta, \frac{\pi h}{1+r}\right) - \frac{K}{(1+r)^N} B(N, \eta, \pi) && (23) \end{aligned}$$

la valeur initiale de l'option, avec

$$\eta = \inf\left\{j \in \mathbb{N} \quad | \quad h^j b^{N-j} S - K > 0\right\} \tag{24}$$

$$B(N,\eta,\pi) = \sum_{j=\eta}^{N} \binom{N}{j} \pi^j (1-\pi)^{N-j} \tag{25}$$

# 3 La formule en continu

## 3.1 Application du modèle au cas continu

En pratique, le cours de l'action varie continûment et le contenu d'un portefeuille peut être modifié à tout moment. Pour prendre ceci en compte, on a deux méthodes :

- bâtir un modèle continu
- couper l'intervalle de temps $[0;T]$ en $N$ morceaux et appliquer le modèle binomial discret

La première est plus rigoureuse mais plus complexe. On va ici essayer de comprendre la seconde.

Dans le modèle binomial les paramètres $r$, $h$ et $b$ ne variaient pas. Mais quand on modifie la durée d'une période, il va falloir déterminer de quelle manière ils dépendent de la période. Pour des petites périodes, le taux d'intérêt est proportionnel à la période. En effet ce que rapporte un placement sans risque à la ième période est très proche de ce qu'il rapportait à la première car le capital investi dans l'actif sans risque aura peu évolué entre temps. On choisit donc

$$r_N = \frac{\rho T}{N} \tag{26}$$

$\rho$ représente le rendement instantané de l'actif sans risque

Le choix de $h$ et $b$ est plus compliqué. Il faut constater que pour $i$ assez grand les $N/i$ variables aléatoires indépendantes $ln\left(\frac{S_{i(k+1)}}{S_{ik}}\right)$ ressemblent à des Gaussiennes de loi normale sous une probabilité martingale. Leur variance est proportionnelle à celle $\sigma_N^2$ de la loi binomiale. La somme de ces v.a. indépendantes correspond au prix de l'actif à la date $T$. Elle ne dépend pas du découpage. Or on sait que les variances de lois gaussiennes indépendantes s'ajoutent. On a donc

$$N\sigma_N^2 \rightarrow \text{réel non nul} \tag{27}$$

On note $\sigma^2 T$ ce réel. $\sigma$ est appelé volatilité instantanée de l'actif.

## 3.2 Passage à la limite

On peut maintenant voir le cas continu comme la limite du cas binomial avec les paramètres choisis comme ci-dessus La formule du cas discret s'écrit :

$$C = SB\left(N, \eta_N, \frac{\pi_N h_N}{1+r_N}\right) - \frac{K}{(1+r_N)^N} B(N,\eta_N,\pi_N) \tag{28}$$

avec

$$B(n,\eta,\pi) = \sum_{j=\eta}^{n} \binom{n}{j} \pi^j (1-\pi)^{n-j} \tag{29}$$

$$\pi_N = \frac{1+r_N-b_N}{h_N-b_N} \tag{30}$$

Il faut donc regarder la limite $B(N,\eta_N,\pi_N)$
*Approche de la méthode utilisée :*
On écrit B comme une probabilité

$$B(N,\eta_N,\pi_N) = 1 - P(Y_N < \eta_N) \tag{31}$$

où $Y_N$ est la somme de $N$ variables indépendantes de loi de Bernouilli de paramètre $\pi_N$

La limite de la probabilité se détermine ensuite grâce à une variante du théorème central-limite, ce qui nous permet d'avoir un résultat ne dépendant que de $\sigma$ et pas de $h$ et $b$. On obtient la formule de Black et Scholes :

$$C = S\phi(d) - Ke^{-\rho T}\phi(d-\sigma\sqrt{T}) \tag{32}$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du \tag{33}$$

$$d = \frac{ln(S/K)+\rho T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \tag{34}$$

On notera que le modèle continu aboutit à la même formule.

## 3.3 Commentaires sur cette formule

Dans la formule interviennent le prix de l'action à la date initiale, le prix d'achat éventuel, le taux d'intérêt, la date d'exercice et la volatilité instantanée de l'action que l'on a due supposer constante. C'est le seul paramètre qui n'est pas parfaitement connu à la date 0 et qui pourrait être déterminé par des modèles statistiques. On peut regarder la dépendance de ce prix théorique en fonction de ces paramètres.

### 3.3.1 Dépendance par rapport au prix de l'actif

Cette donnée est importante car elle nous donne la quantité d'actifs à la date zéro dans le portefeuille dupliquant l'option. On trouve

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \phi(d) \tag{35}$$

On voit que c'est une quantité positive, ce qui est attendue, et qu'elle est toujours inférieure à 1.

### 3.3.2 Dépendance par rapport à la volatilité

Le but d'une option étant de spéculer, on s'attend à ce que son prix augmente avec la volatilité de l'actif sous-jacent (plus les variations de l'actif sont incertaines plus une option est intéressante). Ceci est vérifié car $C$ tend vers $S$ (valeur plafond pour $C$) quand $\sigma$ croît à l'infini.

### 3.3.3 Dépendance par rapport à la date d'exercice

Ici deux tendances contraires entrent en jeu : le prix du call payé à l'instant 0 peut être réinvesti et prend donc de la valeur avec le temps. Ceci amènerait à dire que le prix d'un call diminue avec le temps de maturité. D'un autre côté, plus le temps de maturité est grand plus l'incertitude sur la valeur de l'actif à sa maturité est grande. La formule de Black et Scholes permet de résoudre cette question car on peut constater que le prix du call est une fonction croissante du temps de maturité.

# Références

[1] Dana et Piqué : *Marchés financiers en temps continu*

[2] Demange et Rochet : *Méthodes mathématiques de la finance*